Ejercicios Resueltos

Física I

Guía 3: Sistema de Partículas

- Cantidad de movimiento lineal, angular, y su conservación - Centro de masa -

Para contactarte con nosotros, escribinos a

resueltoscbc@gmail.com

Índice

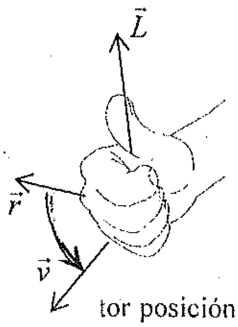
Momento angular y de una fuerza ... 2
La 2da ley de Newton integral ... 4
Sistema aislado ... 6
El centro de masa ... 7
Los choques y una aproximación ... 7
Problemas combinados ... 23

Momento Angular y de una fuerza

Se define como "momento angular" o "cinético", a la magnitud: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Donde $\vec{r}$ es el vector posición del objeto, y "$\vec{p} = m.\vec{v}$" es su cantidad de movimiento lineal. Es muy importante notar que:

- esta magnitud depende del sistema de referencia, ya que el vector $\vec{r}$ depende de él.
- como todo producto vectorial es perpendicular a los dos vectores que se multiplicaron, por lo tanto es perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{v}$. Es decir, cuando un cuerpo se mueve por un plano, el momento angular $\vec{L}$ es un vector perpendicular a ese plano.
- otra forma de calcular al vector momento angular $\vec{L}$ es: $\vec{L} = |\vec{r}|.|\vec{p}|.sen(\alpha)$

Donde α es el ángulo formado entre los vectores posición $\vec{r}$ y velocidad $\vec{v}$. Cuando lo calculamos de esta forma, el carácter vectorial se obtiene con la:



Regla de la mano derecha: "el vector $\vec{L}$ es perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{v}$, y su sentido se obtiene haciendo girar los dedos de la mano derecha, desde el vector $\vec{r}$ hacia el vector $\vec{v}$. Hacia donde apunta el pulgar, apunta $\vec{L}$"

Definamos el momento de una fuerza. Es el vector $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ donde r tor posición que nos dice donde se encuentra el objeto. Características:

- esta magnitud también depende del sistema de referencia, a través del vector $\vec{r}$
- como todo producto vectorial es perpendicular a los dos vectores que se multiplicaron, por lo tanto es perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{F}$.
- otra forma de calcularlo es: $\vec{M} = |\vec{r}|.|\vec{F}|.sen(\alpha)$ donde α es el ángulo formado entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$. El carácter vectorial se obtiene con la regla de la mano derecha.

El Teorema que relaciona los momentos que el cuerpo recibe, con el cambios de ***L***, dice: $\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Y de este teorema sale una consecuencia muy importante. En el caso de problemas con "fuerzas centrales", es decir fuerzas que apuntan siempre hacia un punto fijo del espacio, eligiendo ese punto como centro para medir posiciones, el momento de las fuerzas vale 0 (ya que α entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$ se anula por ser colineales en todo instante). En ese caso el momento angular $\vec{L}$ medido desde ese centro resulta constante.

1. El vector posición de un cuerpo de 6 kg de masa está dado por: $\vec{r} = \hat{i}.(3.t^2 - 6.t) + \hat{j}.(-4.t^3)$ ...

(a) saco la aceleración derivando dos veces la posición:

$$\vec{r} = \hat{i}.(3.t^2 - 6.t) + \hat{j}.(-4.t^3) \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \hat{i}.(6.t - 6) + \hat{j}.(-12.t^2) \quad \rightarrow \quad \vec{a} = \hat{i}.(6) + \hat{j}.(-24.t)$$

Por lo tanto, de la 2^{da} ley de Newton resulta: $\vec{F} = 6\,kg.\vec{a} = \hat{i}.(36) + \hat{j}.(-144.t)$

(b) para el "torque" o momento de esta resultante respecto del origen, debo hacer el producto vectorial de su posición $\vec{r}$ y la expresión de esta fuerza:

$$M_F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3.t^2 - 6.t & -4.t^3 & 0 \\ 36 & -144.t & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}.(0) + \hat{j}.(0) + \hat{k}.(-288.t^3 + 864.t^2)$$

Es decir que también el momento es una magnitud variable con el tiempo.

(c) para el momento lineal de la partícula, multiplico:

$$\vec{p} = m.\vec{v} = 6.\left(\hat{i}.(6.t - 6) + \hat{j}.(-12.t^2)\right) = \hat{i}.(36.t - 36) + \hat{j}.(-72.t^2)$$

Y para el angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3.t^2 - 6.t & -4.t^3 & 0 \\ 36.t - 36 & -72.t^2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}.(0) + \hat{j}.(0) + \hat{k}.(-72.t^4 + 288.t^3)$

Derivá este resultado y verificá que se cumple $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ ✓

2. Una piedra de 0,300 kg tiene una velocidad horizontal de 12 m/s cuando está en el punto P. ¿Qué ...

De la definición: $\vec{L} = |\vec{r}|.|\vec{p}|.sen(\alpha) = |8\,m|.|0,3\,kg.12\,\frac{m}{s}|\,sen(36,9°) = 17,3\,\frac{kg.m^2}{s}$ ✓

Observación: se puede usar también la expresión del producto vectorial; para eso debo escribir la posición como un vector ($r = (x,y,z)$ = (-8m.cos(36,9) ; 8m sen(36,9) ; 0)) y lo mismo con la cantidad de movimiento p = (0,3 kg. 12m/s ; 0 ; 0) ... verificalo

3. Un lanzador de disco aplica una fuerza de F = (30,0 N/s².t²).i + (40,0 N + 5N/s.t).j a un disco ...

La 2da ley de Newton integral

Se la conoce con este nombre porque resulta de integrar en dicha ley de ambos lados, respecto al tiempo:

$$\int_{t_o}^{t_f} \bar{F}.dt = M.\bar{v}_f - M.\bar{v}_o$$

El vector que resulta de integrar del lado izquierdo se lo llama ***impulso*** de la fuerza.

Reemplazo e integro respecto al tiempo, y los versores se los usa como cualquier factor constante (es decir, quedan multiplicando la expresión que integramos):

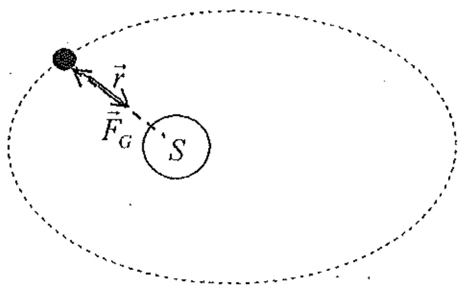
$$\int_{t_o}^{t_f} \left(30.t^2.\hat{i} + (40+5.t).\hat{j}\right)dt = M.\bar{v}_f - \underbrace{M.\bar{v}_o}_{0} \xrightarrow{Integro} 10.t^3.\hat{i} + \left(40.t + \tfrac{5}{2}.t^2\right)\hat{j}\Big|_{0}^{t=0,5s} = 2.v_f$$

$$v_f = \frac{10.(0,5)^3.\hat{i} + \left(40.(0,5) + \frac{5}{2}.(0,5)^2\right)\hat{j}}{2} = 0,625\tfrac{m}{s}\hat{i} + 10,31\tfrac{m}{s}.\hat{j} \quad \checkmark$$

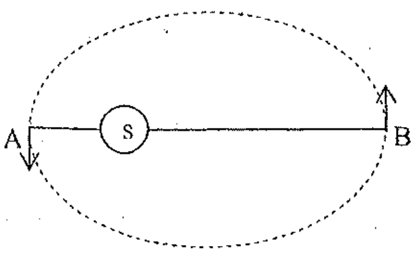
4. Cuando la Tierra está en el afelio (la posición más alejada del Sol) el 2 de julio, su distancia …

Cuando la Tierra gira alrededor del Sol, la fuerza que tiene aplicada es la gravitatoria, que está dirigida hacia el foco de una elipse, que es el punto en que se encuentra el Sol. Para la Tierra, como tiene una fuerza neta aplicada **no** se conserva la cantidad de movimiento $\vec{p} = m.\vec{v}$.

Pero en cambio, la fuerza gravitatoria que tiene aplicada es paralela a su vector posición (está sobre la dirección radial), son vectores colineales ($\alpha = 0$), y el momento $\vec{M}$ respecto al Sol (centro de la órbita) vale cero. Así:



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = cte$$



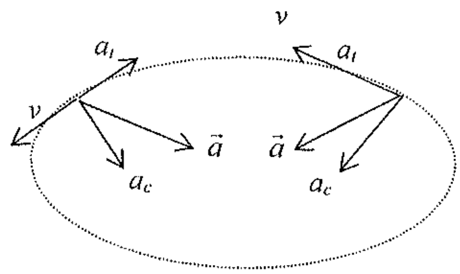
En A y B son $\perp$

En los puntos *afelio*: posición A (máximo acercamiento al Sol), y *perihelio*: posición B (máximo alejamiento al Sol) el vector posición de la Tierra es perpendicular al vector $\vec{p} = m.\vec{v}$. Esto ocurre sólo en estos dos puntos, en puntos intermedios como la velocidad es tangente a la elipse **no** forma 90° con el radio. Como el momento angular es constante, tenemos:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B \rightarrow |R_A|.\cancel{M_T}.|V_A|.sen(90) = |R_B|.\cancel{M_T}.|V_B|.sen(90)$$

Basta reemplazar los datos y despejar: $v_B = \dfrac{1,52.10^{11}m \; . \; 2,93.10^4 \frac{m}{s}}{1,47.10^{11}m} \cong 3,03.10^4 \frac{m}{s}$

En cuanto al dibujo de las componentes de la aceleración, tengamos en cuenta que la aceleración $\vec{a}$ apunta como la fuerza aplicada, es decir hacia el centro de la elipse. La componente tangencial de la aceleración a veces apunta a favor de la velocidad, y a veces en contra.

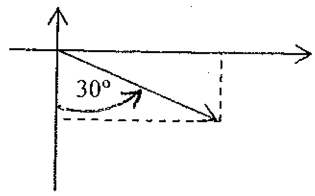


Por eso, el módulo de $\vec{v}$ va cambiando: de a ratos aumenta, de a ratos disminuye. La componente radial (ojo, el eje radial no va hacia el centro de la elipse sino que es perpendicular al tangencial) existe en todo punto, ya que es la responsable del cambio de dirección de $\vec{v}$.

En los puntos A y B (*afelio* y *perihelio*) no tenemos componente tangencial, ya que la dirección radial coincide con la dirección que apunta hacia el foco de la elipse donde se encuentra el SOL.

5. Un sistema está compuesto por tres partículas de masas 3 kg, 2 kg y 5 kg. La primera …

Primero descompongo el vector v_2 sobre los ejes cartesianos. Para eso tenemos el ángulo con el eje X (si es negativo entonces lo marcamos en sentido horario). Por trigonometría:



$$v_x = v_2.\cos(30) \cong 6{,}93\tfrac{m}{s} \qquad v_y = v_2.sen(30) = -4\tfrac{m}{s}$$

(a) de la expresión de la velocidad del centro de masa, reemplazamos $v_{cm} = 0$ (reposo):

$$v_{cm} = \frac{v_1.m_1 + v_2.m_2 + v_3.m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{6\tfrac{m}{s}.3\,kg.\hat{i} + \left(6{,}93\tfrac{m}{s}\hat{i} - 4\tfrac{m}{s}\hat{j}\right).2\,kg + 5\,kg.v_3}{10\,kg}$$

De aquí despejo la velocidad de la tercera partícula

$$v_3 = \frac{-6\tfrac{m}{s}.3\,kg.\hat{i} - \left(6{,}93\tfrac{m}{s}\hat{i} - 4\tfrac{m}{s}\hat{j}\right).2\,kg}{5\,kg} \cong -6{,}37\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 1{,}6\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

(b) reemplazo en la misma expresión:

$$v_{cm} = -2\tfrac{m}{s}\hat{i} + 2\tfrac{m}{s}.\hat{j} = \frac{6\tfrac{m}{s}.3\,kg.\hat{i} + \left(6{,}93\tfrac{m}{s}\hat{i} - 4\tfrac{m}{s}\hat{j}\right).2\,kg + 5\,kg.v_3}{10\,kg}$$

Despejo:

$$v_3 = \frac{10kg.(-2\tfrac{m}{s}\hat{i} + 2\tfrac{m}{s}\hat{j}) - 6\tfrac{m}{s}.3\,kg.\hat{i} - \left(6{,}93\tfrac{m}{s}\hat{i} - 4\tfrac{m}{s}\hat{j}\right).2\,kg}{5\,kg} \cong -10{,}37\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 5{,}6\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

(c) para la energía cinética del sistema debemos sumar las de cada partícula:

$$E_{sist} = \tfrac{1}{2}.m_1.(v_1)^2 + \tfrac{1}{2}.m_2.(v_2)^2 + \tfrac{1}{2}.m_3.(v_3)^2$$

En v_2 debemos usar el módulo:

$$200j = \tfrac{1}{2}.3kg.\left(6\tfrac{m}{s}\right)^2 + \tfrac{1}{2}.2kg.\left(8\tfrac{m}{s}\right)^2 + \tfrac{1}{2}.5kg.(v_3)^2 \xrightarrow{despejo} v_3 = \sqrt{\frac{200-54-64}{2,5}} \cong 5,73\tfrac{m}{s}$$

Este resultado que despejamos es el módulo de la velocidad de la tercera partícula, pero no podemos sacar ni la dirección ni el sentido de su movimiento, con los datos del enunciado.

6. En un instante particular, tres partículas se mueven como muestra la figura. Están sujetas únicamente a sus interacciones mutuas, así que no actúan fuerzas externas….

Sistema aislado

Un sistema de cuerpos se considera aislado si las únicas fuerzas que reciben sus integrantes son las que provienen de la interacción con los otros integrantes del sistema. Algunos de estos conceptos ya los discutimos en la última práctica de Física del CBC, pero también los ampliaremos durante el transcurso de este cuadernillo. Lo importante es que el concepto de aislado es siempre relativo al sistema que se considere. Por ejemplo aquí, si tomo como sistema a m_1 y m_2, entonces el sistema no está aislado, porque recibe fuerzas de m_3.

Para un sistema aislado como éste, la 2^{da} ley de Newton para cada partícula nos queda:

$$\overline{F}_{1,2} + \overline{F}_{1,3} = M_1.\overline{a}_1 \quad ; \quad \overline{F}_{2,1} + \overline{F}_{2,3} = M_2.\overline{a}_2 \quad ; \quad \overline{F}_{3,1} + \overline{F}_{3,2} = M_3.\overline{a}_3$$

Sumo las ecuaciones: $\overline{F}_{1,2} + \overline{F}_{1,3} + \overline{F}_{2,1} + \overline{F}_{2,3} + \overline{F}_{3,1} + \overline{F}_{3,2} = M_1.\overline{a}_1 + M_2.\overline{a}_2 + M_3.\overline{a}_3$

Y recordando que de la tercera ley de Newton las fuerzas de interacción son iguales y opuestas, se encuentra que del lado de las fuerzas la suma da cero. Se tiene así que:

$$M_1.\overline{a}_1 + M_2.\overline{a}_2 + M_3.\overline{a}_3 = 0$$

El lado izquierdo de esta igualdad es la derivada del vector cantidad de movimiento $m.v$

$$M_1.\overline{a}_1 + M_2.\overline{a}_2 + M_3.\overline{a}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d(M_1.\overline{v}_1 + M_2.\overline{v}_2 + M_3.\overline{v}_3)}{dt} = 0$$

Y una derivada da cero cuando la magnitud es constante. Se llega entonces a la siguiente ley:

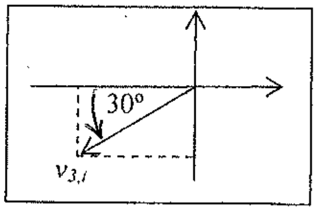
"Para un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema es constante"

$$\overline{p}_{sist} = cte$$

$$M_1.\overline{v}_{1,f} + \ldots + M_n.\overline{v}_{n,f} = M_1.\overline{v}_{1,i} + \ldots + M_n.\overline{v}_{n,i}$$

Una característica importante de esta igualdad es el carácter vectorial de las velocidades. Por eso voy a usar las componentes sobre los ejes, y los versores. Para la velocidad inicial de m_3, descompongo:

$$v_{3,i} = -4\tfrac{m}{s}.\cos(30°).\hat{i} - 4\tfrac{m}{s}.sen(30°).\hat{j}$$



Las otras dos velocidades iniciales están alineadas con algún eje, así que no hay necesidad de descomponer, pero si ser cuidadosos con los sentidos:

$$v_{2,i} = +2\tfrac{m}{s}.\hat{j} \quad ; \quad v_{1,i} = +1\tfrac{m}{s}.\hat{i}$$

Para la velocidad final del 1, como apunta en el sentido negativo del eje x $\quad v_{1,f} = -3\tfrac{m}{s}.\hat{i}$

Planteo la conservación de p:

$$M_1.\bar{v}_{1,f} + M_2.\bar{v}_{2,f} + M_3.\bar{v}_{3,f} = M_1.\bar{v}_{1,i} + M_2.\bar{v}_{2,i} + M_3.\bar{v}_{3,i}$$

$$2kg.\left(-3\tfrac{m}{s}.\hat{i}\right) + 0 + 1\,kg.\bar{v}_{3,f} = 2\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 1\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{j} - 3{,}46\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 2kg\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

Se despeja:

$$\bar{v}_{3,f} = \frac{2\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 1\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{j} - 3{,}46\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 2kg\tfrac{m}{s}.\hat{j} + 6\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{i}}{1\,kg} = 4{,}54\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 1\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

El Centro de Masa (CM)

Dado un sistema de partículas se define al CM como el punto del espacio dado por:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{M_1.\bar{r}_1 + M_2.\bar{r}_2 + \ldots + M_n.\bar{r}_n}{M_{total}} \xrightarrow{derivo} \bar{v}_{cm} = \frac{M_1.\bar{v}_1 + M_2.\bar{v}_2 + \ldots + M_n.\bar{v}_n}{M_{total}}$$

Es un punto que se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema. Observar que en el numerador de la expresión de la velocidad aparece la cantidad de movimiento del sistema, y cuando éste se encuentra aislado esa cantidad es constante, la división también da constante. Es decir, en un sistema aislado el CM de masa tiene velocidad constante

Hago la cuenta con las velocidades iniciales, pero por ser un sistema aislado debe dar lo mismo si la hago con las finales

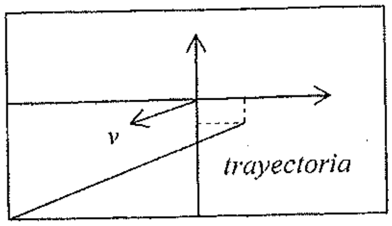
$$\bar{v}_{cm} = \frac{2kg\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 1\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{j} - 3{,}46\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 2\,kg\tfrac{m}{s}.\hat{j}}{3{,}5\,kg} = -0{,}417\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 0{,}286\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

c) primero encontremos la ubicación del centro de masa. Se hace con la expresión:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{M_1.\bar{r}_1 + M_2.\bar{r}_2 + M_3.\bar{r}_3}{(M_1 + M_2 + M_3)} = \frac{2.(-0{,}8.\hat{i} - 1{,}1.\hat{j}) + 0{,}5.(0{,}8.\hat{i} - 1{,}1.\hat{j}) + 1.(1{,}4.\hat{i} + 0{,}8.\hat{j})}{3{,}5}$$

$$\bar{r}_{cm} \cong 0{,}057\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 0{,}95\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

Y para dibujar la trayectoria que sigue el CM, sólo debemos tener presente que, cuando el sistema está aislado, su velocidad es constante. Por lo tanto su movimiento es un MRU. Así que marcamos una línea recta, que empiece en la posición r inicial, y que siga en el sentido de la velocidad determinada en (b)

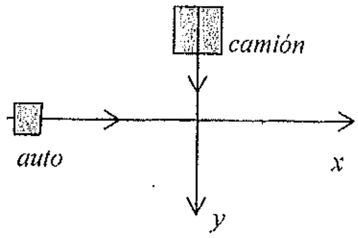


Los choques y una aproximación

Vimos en el CBC que en un choque vale plantear la conservación de la cantidad de movimiento del sistema. Pero eso es lo mismo que decir que el sistema está aislado, o sea que los que chocan no reciben fuerzas más que de el otro involucrado. Esto en general no es así, pero vale como aproximación, si tenemos en cuenta sólo el instante previo y posterior al choque. Lo que estamos diciendo en todo caso es que si contamos un lapso breve de tiempo durante el cual ocurre el choque, las fuerzas de interacción son tan violentas que las externas son despreciables. Y vale contar al sistema como aislado. Pero es importante que recordemos entonces para hacer las cosas bien hay que considerar sólo el lapso del choque, y cuando se indica la velocidad final e inicial de los involucrados deben ser las que tienen un instante antes y después de chocar.

7. Una mañana después de una helada invernal, un auto de 1600 kg que viaja hacia el este a 40,0 km/h choca con un camión de 2800 kg que viaja hacia el sur a 20,0 km/h por …

Tomo un sistema de ejes perpendiculares, como se muestra en el dibujo. Las velocidades iniciales son:



$$\bar{v}_A = 40\tfrac{km}{h}.\hat{i} \quad ; \quad \bar{v}_C = 20\tfrac{km}{h}.\hat{j}$$

Y uso la conservación de la cantidad de movimiento del sistema

$$\bar{p}_{sist.,f} = \bar{p}_{sist.,i} \quad \rightarrow \quad (M_C + M_A).\bar{v}_f = M_C.\bar{v}_{C,i} + M_A.\bar{v}_{A,i}$$

Luego de la colisión los dos móviles siguen juntos, tienen la misma velocidad final, la saco factor común del lado izquierdo. Reemplazo las velocidades iniciales y las masas y despejo la velocidad final:

$$\bar{v}_f = \frac{\overbrace{2800\,kg.20\tfrac{km}{h}}^{56000}\ \hat{j} + \overbrace{1600\ kg.40\tfrac{km}{h}}^{64000}\ \hat{i}}{4400\ kg} \cong 14{,}55\tfrac{km}{h}\hat{i} + 12{,}73\tfrac{km}{h}\hat{j}$$

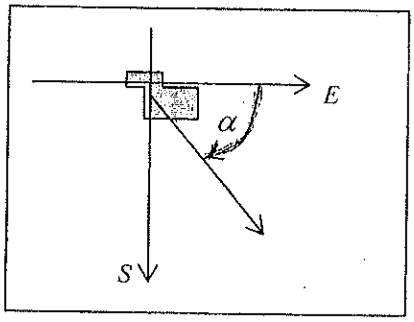
Esta velocidad final está expresada en componentes; pero si queremos podemos expresarla en módulo y un ángulo para dar la dirección del vector velocidad.

- el módulo se saca con Pitágoras:

$$|v_f| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{(14{,}55)^2 + (12{,}73)^2} \approx 19{,}33\tfrac{km}{h}$$

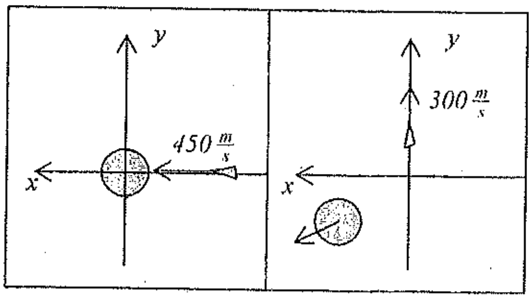
- el ángulo con la dirección este (el eje x de nuestro dibujo), por trigonometría:

$$tg(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{12{,}73}{14{,}55} \approx 0{,}875 \quad \rightarrow \quad \alpha \doteq 41{,}2^\circ$$



8. Una piedra de 0,1 kg descansa sobre una superficie horizontal sin roce. Una bala de 4 g que viaja horizontalmente a 450 m/s golpea la piedra y rebota …

Este es un problema de choque en dos dimensiones, similar al anterior, donde tenemos una piedra que inicialmente está en reposo, y una bala que incide en la dirección del eje x, y luego de la colisión se aleja en la dirección del eje y (siempre paralelo a la superficie horizontal). La situación la representé en el esquema (visto desde arriba).



Luego de la colisión la piedra también habrá adquirido cierta velocidad, que en principio, y como desconocemos su dirección, puede tener dos componentes. Planteo la conservación de la cantidad de movimiento del sistema:

$$\bar{p}_{sist.,f} = \bar{p}_{sist.,i} \quad \rightarrow \quad M_p.\bar{v}_{p,f} + M_b.\bar{v}_{b,f} = \overbrace{M_p.\bar{v}_{p,i}}^{0} + M_b.\bar{v}_{b,i}$$

Reemplazo los datos, usando los versores $\hat{i}$; $\hat{j}$ para darle el carácter vectorial a las velocidades inicial y final de la bala:

$$100\,g\,.\bar{v}_{p,f}+4\,g.\,300\tfrac{m}{s}.\,\hat{j}=4\,g.\,450\tfrac{m}{s}.\,\hat{i}\xrightarrow{despejo}\bar{v}_{p,f}=18\tfrac{m}{s}\,\hat{i}-12\,\tfrac{m}{s}\,\hat{j}$$

Así, la piedra sale con una velocidad que tiene dos componentes horizontales, una en el eje x y otra en el eje y. Si quiero el módulo del vector, sumo las componentes por Pitágoras:

$$\left|v_f\right|=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2}=\sqrt{(18)^2+(-12)^2}\approx 21{,}6\tfrac{m}{s}$$

y para el ángulo con la dirección del eje x de nuestro dibujo, por trigonometría:

$$tg(\alpha)=\frac{v_y}{v_x}=\frac{-12}{18}\rightarrow\quad\alpha=-33{,}7°$$

Observación: el signo indica que este ángulo es por debajo del eje x, como se muestra en el dibujo

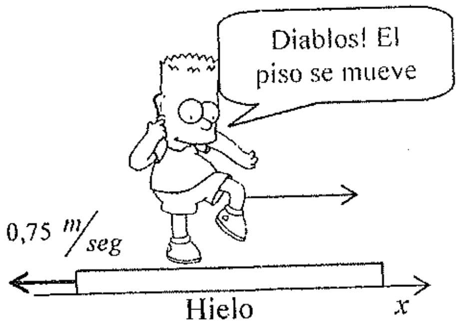
b) para saber si el choque es elástico debemos observar que ocurrió con la energía cinética del sistema. Sumemos las dos energías iniciales y finales y comparemos:

- inicial: $\overbrace{\tfrac{1}{2}.M_p.(v_p)^2}^{0}+\tfrac{1}{2}.M_b.(v_b)^2=\tfrac{1}{2}.0{,}004\,kg.(450\tfrac{m}{s})^2=405\,j$
- final: $\tfrac{1}{2}.M_p.(v_p)^2+\tfrac{1}{2}.M_b.(v_b)^2=\tfrac{1}{2}.0{,}1\,kg.\left(21{,}6\tfrac{m}{s}\right)^2+\tfrac{1}{2}.0{,}004\,kg.\left(300\tfrac{m}{s}\right)^2\approx 203\,j$

Como vemos, no hay conservación de la energía del sistema, por lo tanto no es elástico.

9. Una persona se encuentra parada sobre una plancha de hormigón que descansa sobre un lago helado. Considerar que no hay rozamiento entre la plancha y el hielo. La plancha pesa cuatro veces …

Este problema también vamos resolverlo por la ley de conservación de la cantidad de movimiento del sistema. Para eso observemos que si considero como sistema a la persona y la plancha de hormigón, las fuerzas externas que reciben son el Peso y la Normal. Y como estas fuerzas son iguales y opuestas (hay equilibrio en el eje y) entonces el sistema está aislado. Las únicas fuerzas no compensadas para cada integrante es la que proviene de la interacción con el otro integrante del sistema. Por eso vale plantear la conservación de la cantidad de movimiento del sistema:



$$\bar{p}_{sist.,f}=\bar{p}_{sist.,i}\quad\rightarrow\quad M_H.\bar{v}_{H,f}+M_b.\bar{v}_{b,f}=\overbrace{M_H.\bar{v}_{H,i}}^{0}+\overbrace{M_b.\bar{v}_{b,i}}^{0}$$

Reemplazo los datos de relación de las masas y la velocidad de la persona:

$$M_p.\vec{v}_{p,f}+\overbrace{4.M_p}^{M_b}.(-0{,}75\tfrac{m}{s})\,\hat{i}=0\xrightarrow{despejo}\vec{v}_{p,f}=\frac{M_p.3\frac{m}{s}.\hat{i}}{M_p}=3\tfrac{m}{s}.\hat{i}$$

Esta es la velocidad de la persona, respecto a … Tierra. ¿Y por qué es respecto a Tierra? La respuesta es que hemos reemplazado la velocidad del bloque respecto a Tierra, así que eso ya se usó en el planteo. Por lo tanto, esta no es exactamente la velocidad pedida (quieren la de la persona respecto al bloque). Así que debo terminar usando una Transformación de Galileo:

$$\underbrace{\vec{v}_{p,T}}_{+3\,m/s\,.\breve{i}} = \underbrace{\vec{v}_{p,b}}_{?} + \underbrace{\vec{v}_{b,T}}_{-0{,}75\,m/s\,.\breve{i}} \rightarrow \vec{v}_{p,b} = 3{,}75\,m/s\,.\breve{i}$$

10. Si para las partículas de la figura, ubicadas en una mesa horizontal sin rozamiento, sabemos que m_1 = 4 kg, m_2 = 6 kg, v_1 = 2 m/s. **i** y v_2 = 3 m/s. **j**, (a) determine el momentum angular total del sistema …

a) los momentos angulares respecto de O los calculamos con la expresión del producto vectorial que vimos en el cuadernillo 1-2:

① para m_1 tengo $\bar{r}_1 = 3m.\hat{j}$, $\bar{v}_1 = 2\frac{m}{s}.\hat{i} \rightarrow \bar{L}_1 = \bar{r}_1 \times m_1.\bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24\frac{kg.m^2}{s}.\hat{k}$

② para m_2 tengo $\bar{r}_2 = 4m.\hat{i}$, $\bar{v}_1 = 3\frac{m}{s}.\hat{j} \rightarrow \bar{L}_2 = \bar{r}_2 \times m_2.\bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \end{vmatrix} = 72\frac{kg.m^2}{s}.\hat{k}$

Por lo tanto, $\bar{L}_{sist} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 = 48\frac{kg.m^2}{s}\hat{k}$. Trabajemos ahora desde el CM. Para eso encontremos su posición y su velocidad, con las expresiones que vimos en la página 7:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{m_1.\bar{r}_1 + m_2.\bar{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{12\ kg.m\ \hat{j} + 24\,kg.m.\hat{i}}{10kg} = 2{,}4\,m.\hat{i} + 1{,}2\ m\ \hat{j}$$

$$\bar{v}_{cm} = \frac{m_1.\bar{v}_1 + m_2.\bar{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{8\ kg.\frac{m}{s}\ \hat{i} + 18\ kg.\frac{m}{s}.\hat{j}}{10kg} = 0{,}8\frac{m}{s}.\hat{i} + 1{,}8\ \frac{m}{s}\ \hat{j}$$

Para trabajar midiendo desde el CM debemos pasar las posiciones de los dos cuerpos, usando las relaciones entre los vectores posición:

$$\bar{r}_{1,cm} = \bar{r}_{1,o} + \bar{r}_{o,cm} = \bar{r}_{1,o} - \bar{r}_{cm,o} = 3m.\hat{j} - (2{,}4m.\hat{i} + 1{,}2m.\hat{j}) = -2{,}4\,m.\hat{i} + 1{,}8m.\hat{j}$$

$$\bar{r}_{2,cm} = \bar{r}_{2,o} - \bar{r}_{cm,o} = 4m.\hat{i} - (2{,}4m.\hat{i} + 1{,}2m.\hat{j}) = 1{,}6\,m.\hat{i} - 1{,}2m.\hat{j}$$

Derivando estas expresiones (o usando las transformaciones de Galileo) se sacan las relaciones de velocidades:

$$\bar{v}_{1,cm} = \bar{v}_{1,o} - \bar{v}_{cm,o} = 2\frac{m}{s}.\hat{i} - (0{,}8\frac{m}{s}.\hat{i} + 1{,}8\frac{m}{s}.\hat{j}) = 1{,}2\frac{m}{s}.\hat{i} - 1{,}8\frac{m}{s}.\hat{j}$$

$$\bar{v}_{2,cm} = \bar{v}_{2,o} - \bar{v}_{cm,o} = 3\frac{m}{s}.\hat{j} - (0{,}8\frac{m}{s}.\hat{i} + 1{,}8\frac{m}{s}.\hat{j}) = -0{,}8\frac{m}{s}.\hat{i} + 1{,}2\frac{m}{s}.\hat{j}$$

Volvemos a usar las expresiones del producto vectorial para calcular los momentos angulares, esta vez referido al sistema CM:

$$\bar{L}_1 = \bar{r}_1 \times m_1.\bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2{,}4 & 1{,}8 & 0 \\ 4{,}8 & -7{,}2 & 0 \end{vmatrix} = 8{,}64\frac{kg.m^2}{s}.\hat{k} \quad ; \quad \bar{L}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1{,}6 & -1{,}2 & 0 \\ -4{,}8 & 7{,}2 & 0 \end{vmatrix} = 5{,}76\frac{kg.m^2}{s}.\hat{k}$$

Sumamos: $\overline{L}_{sist,cm} = \overline{L}_1 + \overline{L}_2 = 14{,}4 \frac{kg.m^2}{s} \hat{k}$.

La relación que debemos verificar dice que el momento angular respecto de un punto O es la suma del momento angular respecto del CM más el del CM respecto del punto O:

$$\overline{L}_{sist,O} = \overline{L}_{sist,cm} + \overline{L}_{cm,O}$$

Al término $\overline{L}_{sist,cm}$ se lo suele llamar momento angular de spin, porque tiene que ver con la rotación que efectúa cada integrante respecto del Centro de Masa del sistema. Al término $\overline{L}_{cm,O}$ se lo llama momento angular orbital, porque refiere al giro de toda la masa como si esta estuviera ubicada en el CM. Estos términos son muy usados en la teoría atómica.

Para verificar la relación, nos falta calcular este último término, para lo cual usamos la masa total, la velocidad del CM y su ubicación respecto de O:

$$\overline{L}_{cm,O} = \overline{r}_{cm} \times M_t.\overline{v}_{cm} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ 2{,}4 & 1{,}2 & 0 \\ 8 & 18 & 0 \end{vmatrix} = 33{,}6 \frac{kg\,m^2}{s} \hat{k}$$

Verifiquemos: $\overline{L}_{sist,O} = \overline{L}_{sist,cm} + \overline{L}_{cm,O} \quad \rightarrow \quad 48 \frac{kg\,m^2}{s}.\hat{k} = 14{,}4 \frac{kg\,m^2}{s}.\hat{k} + 33{,}6 \frac{kg\,m^2}{s}.\hat{k}$ ✓

b) para la energía cinética respecto del Lab:

$$E_1 = \tfrac{1}{2}.M_1.(v_1)^2 = 8\ j \quad ; \quad E_2 = \tfrac{1}{2}.M_2.(v_2)^2 = 27\ j \quad ; \quad E_{sist,O} = E_1 + E_2 = 35 j$$

Para la energía de las partículas respecto del CM, usemos las velocidades relativas calculadas antes. Para eso, como tenemos componentes, recordemos que se necesita sumarlas por Pitágoras para sacar el módulo:

$$E_1 = \tfrac{1}{2}.M_1.\left(\sqrt{(v_{1x})^2 + (v_{1y})^2}\right)^2 = 2kg.\left((1{,}2)^2 + (-1{,}8)^2\right) = 9{,}36\ j$$

$$E_2 = \tfrac{1}{2}.M_2.\left(\sqrt{(v_{2x})^2 + (v_{2y})^2}\right)^2 = 3\,kg.\left((-0{,}8)^2 + (1{,}2)^2\right) = 6{,}24\ j$$

Por lo tanto la energía del sistema respecto del CM vale: $E_{sist,cm} = E_{1,cm} + E_{2,cm} = 15{,}6 j$

La relación a verificar: $E_{sist,O} = E_{sist,cm} + \frac{1}{2}.M_T.(v_{cm,O})^2$

Reemplazamos la componentes de la velocidad del CM calculadas en la página anterior:

$$35 j = 15{,}6 j + \tfrac{1}{2}.10\,kg.\left(\sqrt{(0{,}8)^2 + (1{,}8)^2}\right)^2 = 35\ j \quad ✓$$

11. Suponer que las dos partículas del problema anterior están unidas por un resorte con constante 2.10^{-3} N/m y que inicialmente no está estirado. (a) ¿Cómo afectará esta nueva característica al movimiento …

a) Si consideramos como sistema a las dos partículas junto con el resorte, es evidente que seguimos teniendo un sistema aislado, ya que el resorte sólo agrega una fuerza interna al problema (es decir una fuerza entre los integrantes del sistema). Como además el resorte es de masa despreciable, la cantidad de movimiento es la misma que teníamos en el problema anterior, por lo tanto el CM se moverá exactamente de la misma forma.

Observación: como cada partícula no es un sistema aislado, y recibe una fuerza nueva (la del resorte) el movimiento de cada una de ellas va a cambiar. Es razonable esperar que las dos partículas oscilen aproximándose y alejándose en forma más o menos armónica. Pero el CM se traslada sin notar la aparición de nada nuevo, porque la fuerza del resorte es interna al sistema.

b) la energía total del sistema se pude calcular sumando las energías cinéticas y elástica (acumulada en el resorte). Por la forma en que se pregunta parece que la interacción entre los cuerpos se debe exclusivamente al resorte. De ser así, la energía mecánica del sistema va a ser constante, porque las fuerzas externas se compensan y las internas son conservativas (la fuerza elástica del muelle). En ese caso, en todo momento tenemos la misma energía, y no hace falta precisar en la pregunta para qué momento quieren que hagamos la cuenta. Con los datos que contamos, la hacemos para el instante inicial:

$$E_{mec,sist} = E_{cin,1} + E_{cin,2} + \overbrace{E_{elást.}}^{0} = 35\,j$$

Donde se usó que en el instante inicial el resorte estaba sin deformar, y las energías cinéticas son conocidas del problema anterior.

c) como discutimos en la parte (b), la energía debe ser constante. Por lo tanto podemos igualar para esta situación con la energía mecánica inicial calculada en (b):

$$E_{cin,1} + E_{cin,2} + \tfrac{1}{2}.k.(0{,}4m)^2 = 35\,j \quad \rightarrow \quad E_{cin,1} + E_{cin,2} = 35\,j - \overbrace{1{,}6.10^{-4}\,j}^{E_{elást.}} = 34{,}99984\,j$$

Observación: usé los datos del problema como figuran en la guía, aunque la constante del resorte es tan baja que prácticamente es despreciable para hacer estas cuentas.

d) para este punto debemos plantear la relación que vimos en el problema anterior entre las energías cinética en el sistema CM y fijo al Lab.

$$E_{sist,O} = E_{sist,cm} + \tfrac{1}{2}.M_T.(v_{cm,O})^2$$

Para relacionar las velocidades de las partículas referidas al CM, con la E_{cin} referida al sistema fijo (O). Reemplazando las componentes de la velocidad del CM calculadas en el anterior:

$$\overbrace{34{,}99984\,j}^{\cong 35\,j} = \tfrac{1}{2}.M_1.(v_{1,cm})^2 + \tfrac{1}{2}.M_2.(v_{2,cm})^2 + \overbrace{\tfrac{1}{2}.10kg.\left(\sqrt{(0{,}8)^2 + (1{,}8)^2}\right)^2}^{19{,}4\,j}$$

De aquí sacamos la ecuación: $\quad 15{,}6 = 2.(v_{1,cm})^2 + 3.(v_{2,cm})^2 \quad (♥)$

Por otra parte, las velocidades de las partículas en el sistema CM están relacionadas. Midiendo en el sistema CM, la ubicación de este punto es el origen (es una obviedad, pero si medimos tomando como centro de los ejes a este punto, su ubicación es el (0,0)). Por lo tanto tenemos:

$$\bar{r}_{cm} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{(m_1 + m_2)} \xrightarrow{sist.\ CM} 0 = m_1\bar{r}_{1,cm} + m_2\bar{r}_{2,cm} \xrightarrow{derivo} 0 = m_1\bar{v}_{1,cm} + m_2\bar{v}_{2,cm}$$

O sea, ***las cantidades de movimiento sumadas en el sistema CM, dan 0***. Este resultado era esperable porque vimos que $M_T.\bar{v}_{cm} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2$ vale para cualquier sistema. Pero, en particular, para el sistema CM, la velocidad de este punto es 0 (como se mide desde él, no lo vemos moverse), entonces:

$$\overbrace{M_T.\bar{v}_{cm,cm}}^{0} = m_1\bar{v}_{1,cm} + m_2\bar{v}_{2,cm}$$

Info: resueltoscbc@gmail.com

Es la misma expresión que encontramos arriba. Reemplazamos en esta relación:

$$0 = 4.\bar{v}_{1,cm} + 6.\bar{v}_{2,cm} \xrightarrow{despejo} \bar{v}_{1,cm} = -1{,}5\,.\bar{v}_{2,cm}$$

Sustituyo en (♥):

$$15{,}6 = 2.(-1{,}5.v_{2,cm})^2 + 3.(v_{2,cm})^2 = 7{,}5.(v_{2,cm})^2 \xrightarrow{despejo} v_{2,cm} = 1{,}44\,\tfrac{m}{s}$$

Aplicamos en la sustitución: $\bar{v}_{1,cm} = -1{,}5\,.\bar{v}_{2,cm} = -2{,}16\,\frac{m}{s}$

El signo menos que aparece sólo indica que estas velocidades son opuestas. Pero, con los datos que tenemos no se puede encontrar la dirección y sentido de cada una.

e) la velocidad relativa de una partícula respecto a la otra se saca mediante la transformación de Galileo. Podemos hacerla con las velocidades medidas respecto al sistema Lab (O) o al CM, para el instante inicial:

$$\bar{v}_{2,1} = \bar{v}_{2,O} + \bar{v}_{O,1} = \bar{v}_{2,O} - \bar{v}_{1,O} = 3\tfrac{m}{s}.\hat{j} - 2\tfrac{m}{s}.\hat{i}$$

El módulo de este vector se saca sumando por Pitágoras: $\bar{v}_{2,1} = \sqrt{\left(3\frac{m}{s}\right)^2 + \left(2\frac{m}{s}\right)^2} = 3{,}6\frac{m}{s}$

Verificá que el mismo resultado se obtiene usando las velocidades referidas al CM

f) estos resultados no cambian, porque tenemos las mismas velocidades, masas y posiciones. La fuerza que hace el muelle no afecta en nada la cuenta del momento angular inicial. Y como además es una fuerza interna, tampoco hará que cambie esta magnitud en el tiempo, por lo tanto también acá tendremos: $\bar{L}_{sist} = cte.$

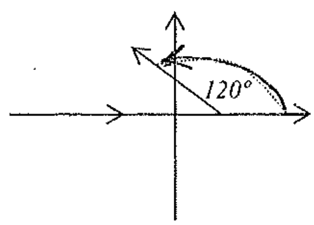
12. Dos partículas de masas $2kg$ y $3\ kg$ se mueven, con relación a un observador, con velocidades $10\ m/s$, a lo largo del eje X, y $8\ m/s$ en un ángulo de 120° medido respecto del mismo eje ...

a) la velocidad de la primera partícula es $v_1 = 10\frac{m}{s}\,\hat{i}$.

Para la segunda saco sus componentes con trigonometría:

$$v_{2,x} = 8\tfrac{m}{s}.\cos(120) = -4\tfrac{m}{s}\,\hat{i}$$

$$v_{2,y} = 8\tfrac{m}{s}.sen(120) = 6{,}93\,\tfrac{m}{s}\,\hat{j}$$



b) usamos la expresión de la velocidad del centro de Masa:

$$v_{cm} = \frac{v_1.m_1 + v_2.m_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{10\frac{m}{s}.2kg.\hat{i} + \left(-4\frac{m}{s}\hat{i} + 6{,}93\frac{m}{s}\hat{j}\right).3\,kg}{5\,kg} = 1{,}6\tfrac{m}{s}\hat{i} + 4{,}16\tfrac{m}{s}\hat{j}$$

c) la velocidad de cada partícula respecto al CM la obtenemos usando las dos Transformaciones de Galileo que vimos en el cuadernillo 1:

$$v_{1,CM} = v_{1,O} + v_{O,CM} = v_{1,O} - v_{CM,O} = 10\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 1{,}6\tfrac{m}{s}\hat{i} - 4{,}16\tfrac{m}{s}.\hat{j} = 8{,}4\tfrac{m}{s}\hat{i} - 4{,}16\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

$$v_{2,CM} = v_{2,O} + v_{O,CM} = v_{2,O} - v_{CM,O} = -4\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 6{,}93\tfrac{m}{s}.\hat{j} - 1{,}6\tfrac{m}{s}\hat{i} - 4{,}16\tfrac{m}{s}.\hat{j} = -5{,}6\tfrac{m}{s}\hat{i} + 2{,}77\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

d) la velocidad relativa de las partículas la obtenemos usando las mismas transformaciones:

$$v_{1,2} = v_{1,O} + v_{O,2} = v_{1,O} - v_{2,O} = 10\tfrac{m}{s}.\hat{i} - \left(-4\tfrac{m}{s}\hat{i} + 6{,}93\tfrac{m}{s}.\hat{j}\right) = 14\tfrac{m}{s}\hat{i} - 6{,}93\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

e) las velocidades anteriores son ahora las que tienen las dos partículas respecto al observador. Vamos a indicarlas con el subíndice "O", para diferenciarlas de las medidas respecto al laboratorio "L" y al centro de masa "CM".

- La energía cinética del sistema respecto al Lab, se saca usando las velocidades relativas al laboratorio, para hallarlas uso la Transformación de Galileo:

$$v_{1,Lab} = v_{1,O} + v_{O,Lab} = 10\tfrac{m}{s}.\hat{i} - 2\tfrac{m}{s}.\hat{j} \qquad v_{2,Lab} = v_{2,O} + v_{O,Lab} = -4\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 4{,}93\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

Las energías se calculan con los módulos de los vectores velocidad, para lo cual debo sumar las componentes por Pitágoras:

$$E_1 = \tfrac{1}{2}.2kg.(v_{1,Lab})^2 = 1kg.\left(\sqrt{(10\tfrac{m}{s})^2 + (2\tfrac{m}{s})^2}\right)^2 = 104j$$

$$E_2 = \tfrac{1}{2}.3kg.(v_{2,Lab})^2 = 1{,}5kg.\left(\sqrt{(-4\tfrac{m}{s})^2 + (4{,}93\tfrac{m}{s})^2}\right)^2 \cong 60{,}5j$$

Por lo tanto en este sistema de referencia, la energía cinética vale: $E_{sist,Lab} = 164{,}5j$

- En el sistema de referencia fijo al observador tendremos:

$$E_1 = \tfrac{1}{2}.2kg.(v_{1,O})^2 = 1kg.(10\tfrac{m}{s})^2 = 100j \qquad E_2 = \tfrac{1}{2}.3kg.(v_{2,O})^2 = 1{,}5kg.(8\tfrac{m}{s})^2 = 96j$$

Por lo tanto, en el sistema fijo al observador tenemos, $E_{sist,O} = 196j$

- Por último, en el sistema CM, podemos usar más de un camino, como nos pide el enunciado. El primero es considerando las velocidades de las partículas referidas a dicho sistema CM:

$$E_1 = \tfrac{1}{2}.M_1(v_{1,CM})^2 = 1\,kg.\left(\sqrt{(8{,}4\tfrac{m}{s})^2 + (4{,}16\tfrac{m}{s})^2}\right)^2 = 87{,}9\,j$$

$$E_2 = \tfrac{1}{2}.M_2(v_{2,CM})^2 = 1{,}5\,kg.\left(\sqrt{(-5{,}6\tfrac{m}{s})^2 + (2{,}77\tfrac{m}{s})^2}\right)^2 = 58{,}5\,j$$

Por lo tanto: $E_{sist,CM} = 146{,}4j$

Otro camino para hacer esta cuenta es usando la relación que presentamos en el ejercicio 10

$$E_{sist,O} = E_{sist,cm} + \tfrac{1}{2}.M_T.(v_{cm,O})^2 = E_{sist,O} = E_{sist,cm} + \overbrace{\tfrac{1}{2}.5\,kg.\left(\sqrt{(1{,}6\tfrac{m}{s})^2 + (4{,}16\tfrac{m}{s})^2}\right)^2}^{\cong 49{,}7j}$$

Reemplazando la energía en el sistema O y este término en la relación de arriba se despeja:

$$\overbrace{E_{sist,O}}^{196j} = E_{sist,cm} + \overbrace{\tfrac{1}{2}.M_T.(v_{cm,O})^2}^{49{,}7j} \quad \rightarrow \quad E_{sist,cm} \cong 146{,}4j \quad \checkmark$$

También se puede expresar la relación de arriba, con las velocidades referidas al Lab. Pero primero debo ubicar la velocidad del CM, respecto del Lab. Para eso uso la transformación de Galileo:

$$\bar{v}_{cm,Lab} = \bar{v}_{cm,O} + \bar{v}_{O,Lab} = \left(1{,}6\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 4{,}16\tfrac{m}{s}.\hat{j}\right) + (-2\tfrac{m}{s}.\hat{j}) = 1{,}6\tfrac{m}{s}.\hat{i} + 2{,}16\tfrac{m}{s}.\hat{j}$$

Con estas componentes del vector velocidad se saca el módulo: $v_{cm,Lab} \approx 2,7\,\frac{m}{s}$

Entonces, la relación entre la energía en el sistema CM y Lab se expresa:

$$\underbrace{E_{sist,Lab}}_{164,5j} = E_{sist,cm} + \underbrace{\tfrac{1}{2}.M_T.(v_{cm,Lab})^2}_{18,1j} \xrightarrow{despejo} E_{sist,cm} = 146,4j \quad \checkmark$$

13. Dos cochecitos, inicialmente en reposo, pueden moverse libremente en la dirección X. El coche A tiene una masa de 4,52 kg y el coche B de 2,37 kg. Ambos están atados entre sí comprimiendo un ...

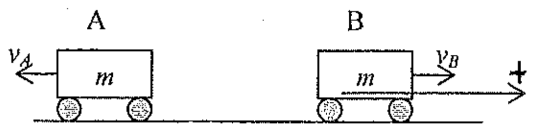
a) "moverse libremente" se debe interpretar como que no existe fricción con el piso, ni ninguna otra acción ejercida que limite el movimiento de cada uno o lo relacione con el del otro. Para resolver el problema vamos a suponer que el resorte es ideal, es decir que se puede despreciar su masa, de modo tal que podemos ignorarlo a la hora de plantear los teoremas de conservación (no se queda ni con cantidad de movimiento, ni con energía). Cuando la cuerda es cortada, la fuerza que ejerce el resorte a ambos cuerpos los saca del reposo. Si considero como sistema al resorte junto con los dos cuerpos, en todo instante se tiene que las fuerzas exteriores al sistema (Normales y Pesos) se equilibran y suman 0. En consecuencia, tenemos que:

$$\sum \vec{F}_{ext.} = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P}_{sist} = cte$$

Es decir se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema (la suma de los dos cuerpos, ya que el resorte tiene $\vec{p} = 0$ porque su masa es despreciable).

¿Cómo es posible que si antes de soltarse estaban los dos quietos, y luego los dos cuerpos se mueven, podamos decir que $\vec{P}_{sist}$ no cambia?

La clave de la respuesta es el carácter ***vectorial*** de esta magnitud: antes de soltarse los dos cuerpos tienen cantidad de movimiento 0, por lo tanto el sistema tiene $\vec{P}_{sist} = \vec{0}$. Luego de soltarse los dos cuerpos siguen sumando cantidad de movimiento $\vec{0}$, porque sus cantidades de movimiento individuales son vectores del mismo módulo y opuestos.



La figura muestra la situación, sale un cuerpo para cada lado, con velocidades de distinto signo, de manera que la suma de sus $\vec{p}$ sigue siendo nula.

Para el planteo de la conservación de $\vec{P}_{sist}$, tomamos un eje con sentido positivo para la derecha.

$$m_1.\vec{v}_{1,i} + m_2.\vec{v}_{2,i} = m_1.\vec{v}_{1,f} + m_2.\vec{v}_{2,f} \xrightarrow{datos} \vec{0} = 4,52\ kg.(-2\,\tfrac{m}{s}\,\hat{i}) + 2,37\ kg.\vec{v}_{2,f}$$

Se despeja: $\vec{v}_{2,f} \approx 3,8\,\frac{m}{s}\,\hat{i}$.

Para contestar el segundo punto, debemos analizar el tipo de fuerza interna con que interactuaron las partes de mi sistema. Como lo hicieron a través de un resorte, que aplica una fuerza elástica conservativa, ***también debe haberse conservado la energía mecánica del sistema***. Esto quiere decirnos que la energía cinética que tienen los dos cuerpos luego de soltar la cuerda, debe ser igual a la energía elástica que tenía almacenada el resorte cuando se hallaba comprimido.

En un sistema aislado siempre se conserva $\vec{P}_{sist}$, pero es raro que se conserve la energía mecánica. Hace falta que la forma en que interactúan entre ellas sea conservativa para que esto ocurra. Debo aclarar que se debe suponer que el resorte queda sin deformación final luego de darles el impulso a los cochecitos. Por lo tanto, queda sin deformación, y se tiene $E_F^{elást.} = 0$. Igualo:

$$E_{mec,i} = E_{mec,f} \rightarrow \quad E_i^{elást.} = \tfrac{1}{2}.M_A.v_A^2 + \tfrac{1}{2}.M_B.v_B^2 \approx 29\ J$$

14. El dispositivo de la figura se conoce como péndulo balístico. Se utiliza para determinar la velocidad de una bala midiendo la altura ***h*** del bloque después que la bala penetra en él ...

En este impacto conocemos que seguramente existen pérdidas de energía (en un choque plástico siempre las hay). Es muy importante notar entonces qué es lo que debemos plantear y en qué orden. Primero planteemos el choque de la bala con el bloque. En ese choque podemos considerar que el sistema está aislado (las fuerzas externas son insignificantes al lado de las de interacción por el impacto), por lo tanto se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema:

$$\vec{p}_F^{\,sist.} = \vec{p}_i^{\,sist.} \rightarrow \quad m.v_o + M.0 = (m+M).v_f \quad \rightarrow \quad v_f = \frac{m.v_o}{(m+M)} \qquad (♗)$$

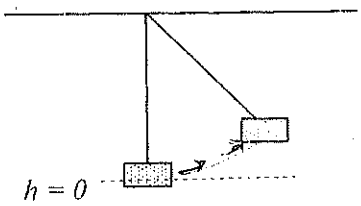
No usé versores porque la velocidad inicial de la bala era horizontal, así que también lo es la del conjunto "bala+bloque" luego de la colisión. A partir de este momento, el sistema se comporta como un único cuerpo, que adquirió cierta velocidad, y que por estar atado al hilo va a empezar a subir como lo hace un péndulo. En este proceso, durante el ascenso la energía mecánica permanece constante, ya que la única fuerza no conservativa es la tensión del hilo, y por ser perpendicular al movimiento no realiza trabajo:

$$\Delta E_{mec} = W^{FNC} = W^{Tensión} = 0 \quad \rightarrow \quad E_{Mec.,f} = E_{Mec.,i}$$

Por lo tanto, tomando el nivel 0 en el punto más bajo, nos queda que la energía mecánica inicial es sólo cinética, y la final es sólo potencial gravitatoria:

$$E_{Mec.,f} = E_{Mec.,i}$$

$$\cancel{(m+M)}.g.h = \tfrac{1}{2}.\cancel{(m+M)}.v_i^{\,2}$$



Recordando que la velocidad inicial del ascenso del péndulo es la que tiene el sistema un instante después de chocar, puedo reemplazar por la expresión (♗)

$$g.h = \frac{1}{2}.\left(\frac{m.v_o}{(m+M)}\right)^2 \xrightarrow{\ despejo\ v_o\ } \quad v_o = \sqrt{\frac{2.g.h.(m+M)^2}{m^2}} = \sqrt{2.g.h}\,.\,\frac{(m+M)}{m}$$

Conclusiones

- en un mismo problema puede usarse más de un teorema de conservación.
- si se habla de conservación de $\vec{p}$, siempre es el del sistema (o sea la suma de los cuerpos interactuantes). Para poder usar esta conservación, el sistema debe estar aislado, o como excepción en un choque (en el cual aproximadamente las fuerzas externas son despreciables al lado de las que se ejercen entre ellos). Pero si se usa en un choque, las velocidades iniciales y finales son las que tienen los cuerpos un *instante antes y después* de la colisión.

se ejercen entre ellos). Pero si se usa en un choque, las velocidades iniciales y finales son las que tienen los cuerpos un *instante antes y después* de la colisión.

- si se habla de la conservación de la energía mecánica, no deben hacer trabajo las fuerzas no conservativas (Normal, rozamiento, Tensión, etc). En general se utiliza para la trayectoria de un cuerpo, porque cuando hay varios interactuando la energía total suele cambiar (ya que las fuerzas de interacción pueden entregar o sacar energía)

15. Una bala de masa **m** y velocidad v pasa por la lenteja de un péndulo de masa M y sale con una velocidad de $\frac{1}{2}\,v$ (ver figura). La lenteja está en el extremo ...

Bueno, este problema sirve para ver si tenemos claros los conceptos de conservación que revisamos en el problema anterior. Nos podemos orientar con el problema anterior, ya que básicamente son los mismos pasos. Primero planteamos el choque de la bala con el bloque. En ese choque podemos considerar que se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema:

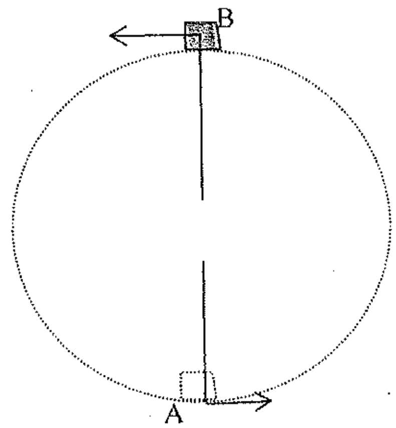
$$\vec{p}_F^{\,sist.} = \vec{p}_i^{\,sist.} \rightarrow m.v_o + M.0 = m.v_{1,f} + M.v_{2,f}$$

Pero, como nos marca el enunciado, la bala sale esta vez con una velocidad igual a la mitad de la que traía. Entonces:

$$m.v_o = m.\frac{v_o}{2} + M.v_{2,f} \xrightarrow{despejo} v_{2,f} = \frac{m.v_o}{2.M} \qquad (\clubsuit)$$

A continuación, planteo que el péndulo empieza a moverse hacia arriba, de manera tal que su energía mecánica es constante (las razones son las mismas de cualquier péndulo: la única fuerza no conservativa es la tensión, que es perpendicular al movimiento, ... bla ...bla)

Poniendo el nivel cero de altura en el punto más bajo, entonces la energía del péndulo es sólo cinética cuando empieza a subir, y al llegar arriba hay potencial . . . y también cinética. Mucho cuidado con esto, si quiero que llegue arriba y no se caiga en ese punto (para poder completar el círculo), entonces más vale que pase con cierta velocidad por el punto más alto. La condición de velocidad mínima para que la cuerda no se afloje, la vimos en el cuadernillo 1- 2: $v_{min} = \sqrt{g.R}$



Planteo la conservación de la energía mecánica:

$$E_{mec.,f} = E_{mec.,i} \rightarrow \frac{1}{2}.M.(v_{min})^2 + M.g.h_B = \frac{1}{2}.M.v_A^{\;2}$$

Nos queda reemplazar la condición de la velocidad mínima en el punto más alto, y que h_B es dos veces el radio R de la circunferencia.

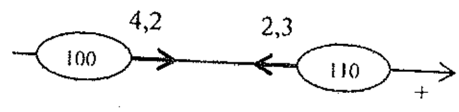
$$\frac{1}{2}.M.g.R + M.g.2.R = \frac{1}{2}.M.v_A^{\;2} \xrightarrow{opero} \frac{5}{2}.\cancel{M}.g.R = \frac{1}{2}.\cancel{M}.v_A^{\;2}$$

Finalmente, usemos que la velocidad en el punto más baja con la que empezó el péndulo es la que obtuvo como velocidad final en el choque, y viene dada por la expresión ($\clubsuit$)

$$5.g.R = v_A^{\;2} \xrightarrow{reemplazo\ (\clubsuit)} 5.g.R = \left(\frac{m.v_0}{2.M}\right)^2 \xrightarrow{despejo\ \ v_o} v_0 = \frac{2.M}{m}.\sqrt{5.g.R}$$

16 Un delantero de rugby de 100 kg de masa salta hacia delante para colocar la pelota detrás de la línea de fondo, y de ese modo anotar un tanto. En el punto de máxima altura de su vuelo está a 1,2 m …

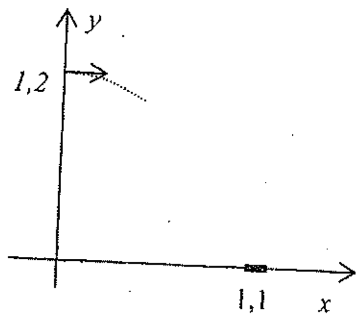
Considero la colisión en una dimensión, y como se van juntos entra en la categoría de "choque plástico". Planteo la conservación de la cantidad de movimiento del sistema, en el eje x:



$$100\ kg.4{,}2\tfrac{m}{s}.\hat{\imath} - 110\ kg.2{,}3\tfrac{m}{s}.\hat{\imath} = (210\ kg).v_f \xrightarrow{despejo} v_f = 0{,}795\tfrac{m}{s}.\hat{\imath}$$

Es decir, luego de la colisión los dos jugadores siguen juntos en el sentido que se movía el primero (o sea el delantero de 100 kg). Veamos si con esta velocidad, este conjunto cae antes o después de la línea de fondo.

Para eso debemos plantear la ecuación de un Tiro Oblicuo (en realidad un tiro horizontal, porque el sistema tiene velocidad inicial sólo en el eje x). La altura de la que comienza la caída es 1,2 m (que es la altura a la que se encontraban los jugadores en el momento del choque). Su velocidad inicial es la final del choque, es decir $v_{ox} = 0{,}795\ \frac{m}{s}$, mientras que $v_{oy} = 0$. Finalmente, la gravedad es la aceleración del conjunto (y en este sistema es negativa en el eje Y).



Tenemos las ecuaciones: $\begin{cases} x = 0{,}795.t \\ y = 1{,}2 - \frac{1}{2}.10.t^2 \end{cases}$

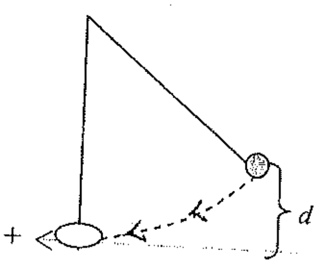
De la 2ª despejo el tiempo de caída, usando $y_f = 0$: $\quad 0 = 1{,}2 - \frac{1}{2}.10.t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{1{,}2}{5}} \cong 0{,}49\,s$

Reemplazo en la 1ra: $\quad x = 0{,}795.0{,}49 \approx 0{,}39\,m$

Este es el alcance, es decir el punto del campo en el que cae medido desde donde se produjo el choque. Como en ese punto estaba a 1,1 m de la línea de fondo, cae antes de llegar a esta línea y ***no*** logra anotar.

17. En el sistema de la figura, inicialmente ambas masas estan en reposo, luego se suelta a M_1 desde una altura "d" impactando contra M_2. Hallar la expresión general para las alturas máximas …

Primero calculo la velocidad que tiene la bola m_1 un instante antes de golpear a la 2da bola. Lo hago por energía, aprovechando que la única fuerza no conservativa es la Tensión, y al ser perpendicular al movimiento no realiza trabajo, entonces la energía mecánica no varía.



$$\overbrace{M_1.g.h_1}^{E_{mec,i}} = \overbrace{\tfrac{1}{2}.M_1.(v_1)^2}^{E_{mec,f}} \rightarrow v_1 = \sqrt{2.g.d} = 2\tfrac{m}{s}$$

Esta es la velocidad que tiene la bola 1 cuando llega al punto más bajo y justo antes de la colisión. Al llegar a ese punto, se produce el choque. Tomo sentido positivo hacia la izquierda (el sentido de la velocidad inicial de la bola 1)

- caso (a): consideremos que el choque es plástico, por lo tanto sólo podemos plantear la conservación de la cantidad de movimiento del sistema, y usar que las dos velocidades finales luego de la colisión son la misma (porque como sabemos, en el choque plástico los cuerpos luego de la colisión siguen juntos) Tenemos:

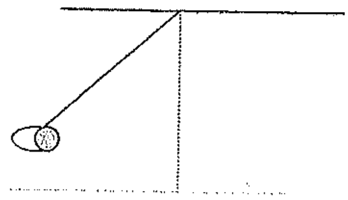
$$\overbrace{M_1.\bar{v}_{1,i}}^{0{,}1.\,2} + \overbrace{M_2.\bar{v}_{2,i}}^{0} = (M_1 + M_2).\bar{v}_f \xrightarrow{despejo} v_f = \frac{0{,}2}{0{,}3} = 0{,}6\hat{6}\,\tfrac{m}{s}$$

Observar que por el signo de la velocidad final, los dos cuerpos se mueven hacia la izquierda luego de la colisión. Planteo el ascenso por conservación de la energía:

$$E_{mec,i} = E_{mec,f}$$

$$(M_1 + M_2).g.h_{máx} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2).\left(\overbrace{v_f}^{0,66}\right)^2$$

$$h_1 \cong 0,023\,m$$



- caso (b): consideremos que la misma es elástica; entonces se conserva la cantidad de movimiento del sistema (como en cualquier choque), y también la energía cinética (por ser una colisión elástica). Tenemos entonces las siguientes igualdades:

$$M_1.\bar{v}_{1,i} + \overbrace{M_2.\bar{v}_{2,i}}^{0} = M_1.\bar{v}_{1,f} + M_2.\bar{v}_{2,f}$$

$$\frac{1}{2}M_1.(v_{1,i})^2 + \overbrace{\frac{1}{2}M_2.(v_{2,i})^2}^{0} = \frac{1}{2}M_1.(v_{1,f})^2 + \frac{1}{2}M_2.(v_{2,f})^2$$

Reemplazamos los datos y nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

① $0,2\frac{m}{s} = 0,1.\bar{v}_{1,f} + 0,2.\bar{v}_{2,f}$ ② $0,2 = 0,05.(v_{1,f})^2 + 0,1.(v_{2,f})^2$

De la primera despejo: $\frac{0,2 - 0,2.\bar{v}_{2,f}}{0,1} = \bar{v}_{1,f} \rightarrow \bar{v}_{1,f} = 2 - 2.\bar{v}_{2,f}$

En la 2^{da}:

$$0,2 = 0,05.(2 - 2.v_{2,f})^2 + 0,1.(v_{2,f})^2 \xrightarrow{binomio} 0,2 = 0,2 - 0,4.v_{2,f} + 0,2.(v_{2,f})^2 + 0,1.(v_{2,f})^2$$

Podemos pasar de lado y resolver la cuadrática:

$$0 = 0,3.(v_{2,f})^2 - 0,4.v_{2,f} \rightarrow v_{2,f} = 0 \quad ó \quad v_{2,f} = 1,3\hat{3}\,\frac{m}{s}$$

La primera solución me dice que $\bar{v}_{1,f} = 2 - 2.\bar{v}_{2,f} = 2\frac{m}{s}$. Esta situación es físicamente absurda, porque indica que la colisión se produce pero nada cambia, el m_2 sigue en reposo, y el m_1 lo atraviesa y se sigue moviendo en el mismo sentido con la misma velocidad inicial. Esto es característico de los problemas de choques elásticos, aparece como una solución matemática (pero físicamente inaceptable), que los dos cuerpos conserven su estado de movimiento.

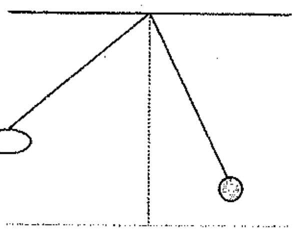
Vamos a la importante, con $v_{2,f} = 1,3\hat{3}\frac{m}{s}$: $\bar{v}_{1,f} = 2 - 2.\bar{v}_{2,f} = -0,6\hat{6}\frac{m}{s}$

Recordando el sentido elegido como positivo, luego del choque la bola 2 sale hacia la izquierda y la bola 1 sale hacia la derecha. Para saber qué altura sube cada una, podemos volver a plantear conservación de la energía (para cada una por separado, y luego de la colisión, como dijimos en las conclusiones del ejercicio 14). Se obtiene para cada una:

$$E_{mec,i} = E_{mec,f}$$

$$M_2.g.h_{máx} = \tfrac{1}{2}.M_2.\Big(\overbrace{v_2}^{1,33}\Big)^2$$

$$h_2 \cong 0,09m$$



$$E_{mec,i} = E_{mec,f}$$

$$M_1.g.h_{máx} = \tfrac{1}{2}.M_1.\Big(\overbrace{v_1}^{0,\bar{6}}\Big)^2$$

$$h_1 = 0,022m$$

- caso (c) consideremos que hay una pérdida de energía del 10%; entonces se conserva la cantidad de movimiento del sistema (como en cualquier choque), y queda el 90% de la energía cinética que traía la bola 1. Tenemos entonces las siguientes igualdades:

$$M_1.\bar{v}_{1,i} + \overbrace{M_2.\bar{v}_{2,i}}^{0} = M_1.\bar{v}_{1,f} + M_2.\bar{v}_{2,f}$$

$$\overbrace{\frac{90}{100}}^{90\,\%}.\underbrace{\tfrac{1}{2}M_1.(v_{1,i})^2}_{0,2\,j} = \tfrac{1}{2}M_1.(v_{1,f})^2 + \tfrac{1}{2}M_2.(v_{2,f})^2$$

Reemplazamos los datos y nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

① $0,2 = 0,1.\bar{v}_{1,f} + 0,2.\bar{v}_{2,f}$ ② $0,18 = 0,05.(v_{1,f})^2 + 0,1.(v_{2,f})^2$

De la primera podemos despejar: $\dfrac{0,2 - 0,2.\bar{v}_{2,f}}{0,1} = \bar{v}_{1,f} \rightarrow \bar{v}_{1,f} = 2 - 2.\bar{v}_{2,f}$

Reemplazamos en la 2^{da}:

$$0,18 = 0,05.(2 - 2.v_{2,f})^2 + 0,1.(v_{2,f})^2 \xrightarrow{binomio} 0,18 = 0,2 - 0,4.v_{2,f} + 0,2.(v_{2,f})^2 + 0,1.(v_{2,f})^2$$

Podemos pasar de lado y resolver la cuadrática:

$$0 = 0,3.(v_{2,f})^2 - 0,4.v_{2,f} + 0,02 \rightarrow v_{2,f} \cong 0,052\tfrac{m}{s} \;\; ó \;\; v_{2,f} \cong 1,28\tfrac{m}{s}$$

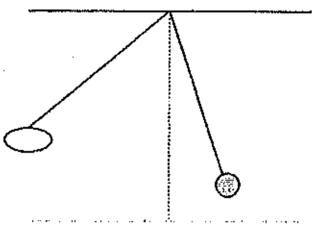
La primera solución me dice que $v_{2,f} \cong 0,052\frac{m}{s}$ y $\bar{v}_{1,f} = 2 - 2.\bar{v}_{2,f} = 1,89\frac{m}{s}$. Esta situación es inaceptable, porque es imposible que el la bola m_1 tenga más velocidad hacia la izquierda que la m_2 (la choca de atrás, debería traspasarla).

La otra solución es $\bar{v}_{1,f} = 2 - 2.\bar{v}_{2,f} = -0,56\frac{m}{s}$. Y esta si es físicamente aceptable. Observar por los signos de las soluciones que nuevamente sale m_2 hacia la izquierda y m_1 hacia la derecha luego del choque. Como antes, por conservación de la energía me fijo hasta qué altura llega cada una.

$$E_{mec,i} = E_{mec,f}$$

$$M_1.g.h_{máx} = \tfrac{1}{2}.M_1.\Big(\overbrace{v_1}^{0,56}\Big)^2$$

$$h_1 \cong 0,016m$$



$$E_{mec,i} = E_{mec,f}$$

$$M_2.g.h_{máx} = \tfrac{1}{2}.M_2.\Big(\overbrace{v_2}^{1,28}\Big)^2$$

$$h_2 \cong 0,084m$$

18. Una granada de mortero de 1,56 kg de masa es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial cuyo módulo es 31 m/s y explota al alcanzar su máxima altura, dividiéndose en tres partes …

(a) ésta primera parte vamos a hacerla sin usar los resultados conceptuales que los alumnos "odian", pero sacaremos al final una conclusión que nos permitiría contestar en forma inmediata. Primero encontremos en qué lugar se produjo la explosión, sacando la altura máxima del Tiro Vertical. Usamos energía para el ascenso de la granada (la velocidad final la tomamos como cero, que es el valor que toma en la altura máxima del tiro vertical):

$$\tfrac{1}{2}.M.(v_i)^2 + M.g.H_i = \tfrac{1}{2}.M.(v_f)^2 + M.g.H_f \xrightarrow{H_i = v_f = 0} H_f = \frac{(v_i)^2}{2.g} \approx 48\,m$$

Con esto ya tenemos la altura donde se produjo la explosión. Ahora veamos que relación guarda la velocidad inicial en x (v_{ox}) de un tiro horizontal, con el alcance de la caída. De las ecuaciones del Tiro Horizontal ($v_{oy} = 0$):

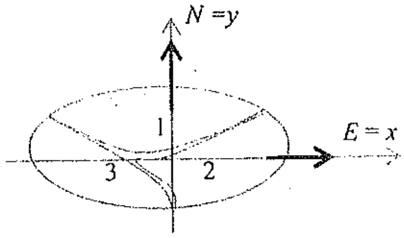
$$\begin{cases} y = h_o - \tfrac{1}{2}.g.t^2 \\ x = v_{ox}.t \end{cases}$$

De la primera despejo el tiempo de caída: $t = \sqrt{\frac{2.h_o}{g}} \xrightarrow{en\ \hat{x}} x = v_{ox}.\sqrt{\frac{2.h_0}{g}}$

Con esta expresión podemos calcular las velocidades iniciales de cada trozo, porque el problema nos dice el alcance de cada uno:

- el 1ro cae en $x = 212\ m$: $\quad 212\ m = v_{OX}.\sqrt{\frac{2.48}{g}} \xrightarrow{despejo} v_o = 68{,}4\ \frac{m}{s}$
- el 2do cae en $x = 68\ m$: $\quad 68\ m = v_{OX}.\sqrt{\frac{2.48}{g}} \xrightarrow{despejo} v_o \cong 21{,}9\ \frac{m}{s}$

A estas velocidades iniciales que saqué para cada parte, debo darle un carácter vectorial porque van en distinta dirección. Miremos en el enunciado para donde salió cada uno y tomemos dos ejes para plantear la explosión. Con los ejes del dibujo tengo:



$$\underbrace{0}_{\vec{p}_{sist,i}} = \overbrace{0{,}78\ kg.68{,}4\,\hat{j} + 0{,}26\,kg.21{,}9\,\hat{i} + m_3.\vec{v}_3}^{\vec{p}_{sist,f}}$$

Para la cantidad de movimiento un instante antes de la explosión pusimos 0 porque el proyectil explota al llegar a la altura máxima (cuando se quedó sin velocidad). La masa de la tercera fracción es la diferencia entra la masa del proyectil y la de las dos primeras partes, o sea 0,52 kg. De esta ecuación despejamos la velocidad final del tercer fragmento:

$$\vec{v}_3 = \frac{-53{,}35\,\hat{j} - 5{,}694\ \hat{i}}{0{,}52\ kg} \cong -102{,}6\tfrac{m}{s}\,\hat{j} - 10{,}95\ \tfrac{m}{s}\,\hat{i}$$

Es decir que a consecuencia de la explosión el tercer fragmento tiene velocidad hacia el oeste y el sur. Podemos averiguar en dónde cae, considerando dos tiros horizontales (uno en cada una de esas direcciones), y usando la expresión del alcance que encontramos antes:

$$Alcance = v_{ox}.\sqrt{\frac{2.h_0}{g}} = \begin{cases} sur)\ A = 102{,}6\frac{m}{s}.\sqrt{\frac{2.48\,m}{g}} \cong 317{,}9\,m \\ oeste)\ A = 10{,}95\frac{m}{s}.\sqrt{\frac{2.48\,m}{g}} \cong 33{,}9\ m \end{cases}$$

Pero hagamos una cuenta al margen del problema. Tratemos de encontrar la posición final del CM, usando la expresión:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{r}_1.m_1 + \vec{r}_2.m_2 + \vec{r}_3.m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Donde las posiciones de cada masa son los lugares donde cayeron (escritos vectorialmente):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{212\ m\,\hat{j}\ \ 0{,}78\ kg + 68\ m\,\hat{i}\ \ 0{,}26\ kg + \left(-317{,}9\,m\,\hat{j} - 33{,}9\,m\,\hat{i}\right)0{,}52\,kg}{1{,}56\ kg} \cong 0.\hat{i} + 0.\hat{j}$$

Si la cuenta no da exactamente 0, es porque estuvimos redondeando a la 2ª cifra decimal (y por lo tanto aparecen errores de aproximación dos lugares después de la coma). Pero la idea es la siguiente: "*el CM de **la granada termina en la misma posición de donde partió***". O sea, a pesar de haber ocurrido una explosión, todas las cuentas nos dicen que el CM ni se entera de este tema, su trayectoria siguió siendo un tiro vertical y al bajar el CM termina en el origen.
Si lo vemos desde la teoría esto empieza a tener sentido; de la ecuación:

$$\sum \vec{F}_{ext.} = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} \xrightarrow{\text{separo en ejes}} \begin{cases} x)\ 0 \rightarrow v_{cm,x} = cte \\ y)\ Peso = m_{sist}.\dfrac{dv_{cm,y}}{dt} \end{cases}$$

En el eje x no hay fuerzas, por lo tanto el CM no acelera, y en consecuencia su velocidad nunca cambia. Como no tenía velocidad inicial en esa dirección, jamás se mueve. En el eje y en cambio, la aceleración es la de la gravedad, por lo tanto el CM sigue moviéndose con aceleración hacia abajo. La explosión no afecta esto para nada, porque lo único que hace aparecer son fuerzas internas al sistema (no externas). La situación la ilustramos en dos momentos posteriores a la explosión, donde se muestra como a pesar que los fragmentos hacen movimientos más complicados, el CM del proyectil se comporta como si nunca hubiera habido explosión, y su movimiento sigue siendo el de un tiro vertical hasta llegar al piso.

Este razonamiento hubiera hecho mucho más fácil el trabajo de la parte (a). Directamente hubiéramos planteado que la posición del CM era (0,0), y de la expresión

$$\vec{r}_{cm} = \frac{212\ m\,\hat{j}\ \ 0{,}78\ kg + 68\ m\,\hat{i}\ \ 0{,}26\ kg + \vec{r}_3.0{,}52\,kg}{1{,}56\ kg} = 0.\hat{i} + 0.\hat{j}$$

Se despejaba donde caía el tercer fragmento.

(b) bueno, para hacer esta parte del problema deberíamos saber si todavía es cierto que los otros dos fragmentos salen horizontales y caen en los mismos lugares. Suponiendo que sea así, las velocidades que calculamos antes a partir de los datos de las caídas son nuevamente las finales después de la explosión. De la fórmula de la velocidad del CM:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{v}_1.m_1 + \vec{v}_2.m_2 + \vec{v}_3.m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Reemplazamos las velocidades de los dos primeros fragmentos, y para el CM usamos que su velocidad es un 10 % de 31 m/s, en el eje z y hacia arriba: $\vec{v}_{cm} = 3{,}1\ \frac{m}{s}\ \hat{k}$

$$3{,}1\frac{m}{s}\hat{k} = \frac{68{,}4\frac{m}{s}\ \hat{j}\ .\ 0{,}78\,kg + 21{,}9\frac{m}{s}\hat{i}\,.0{,}26\,kg + \vec{v}_3.0{,}52\ kg}{1{,}56\ kg}$$

$$\xrightarrow{despejo} \quad \vec{v}_3 = \frac{4{,}836\frac{m}{s}\hat{k} - 53{,}35\hat{j} - 5{,}694\ \hat{i}}{0{,}52\ kg} \cong 9{,}3\frac{m}{s}\hat{k} - 102{,}6\frac{m}{s}\hat{j} - 10{,}95\ \frac{m}{s}\ \hat{i}$$

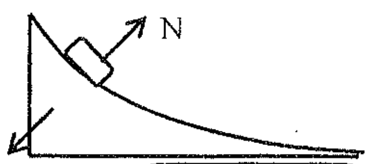
Esta vez tiene componentes en las tres direcciones. Para contestar las dos últimas preguntas nos remitimos a las conclusiones que sacamos antes: la trayectoria del CM es un tiro vertical, como si la granada jamás hubiera explotado, su ecuación horaria es $y = 31\frac{m}{s}.t - \frac{1}{2}.10\frac{m}{s^2}.t^2$ y el CM tiene aceleración (la de la gravedad)

19. Un bloque de masa **m** se desliza sin rozamiento por la superficie curva de la rampa que se muestra en la figura. La rampa, de masa M, está colocada sobre una mesa horizontal tal que el rozamiento ...

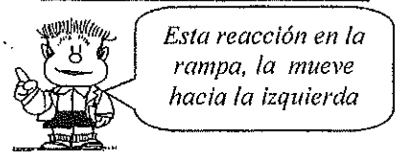
Problemas combinados

Los últimos problemas tienen una característica común, en todos hay magnitudes que se conservan, para alguien. Y otras que no. A prestarle mucha atención a los motivos que iremos mencionando.

La dinámica nos dice que el bloque le ejerce a la rampa una fuerza, la reacción de la Normal N. Esta fuerza hace que la rampa tenga una componente de fuerza lateral hacia la izquierda, y como no existe rozamiento con la mesa, la hace moverse.



Conclusión: ***la rampa se mueve hacia la izquierda*** a la vez que el bloque cae por la rampa. Empiezan a tomar sentido dos preguntas que el alumno siempre debe hacerse: ¿qué magnitudes se conservan y para qué cuerpo o sistema? Veamos:



1) el dato importante es que no hay rozamiento con la mesa, por lo tanto el sistema formado por la rampa y el bloque no pierde energía por ese lado. Tampoco hay rozamiento entre ellos. Por lo tanto, parece correcto decir que la energía mecánica debe conservarse. Sin embargo es evidente que la rampa gana energía, porque estaba quieta y en el piso, pero después de interactuar con el bloque, consigue energía cinética. Como la energía no sale de la nada, debe ser parte de la energía que tenía inicialmente el bloque. Es decir que, la energía mecánica que se conserva es la del sistema "*bloque+rampa*", notándose que la rampa obtiene energía que le entrega el bloque. Por lo tanto, la conservación de la energía mecánica se escribe:

$$E_{mec,f} = E_{mec,i} \rightarrow E_{cin,bloque} + E_{cin,rampa} = E_{pot,bloque} \rightarrow \frac{1}{2}.m.v_1^2 + \frac{1}{2}.M.v_2^2 = m.g.h$$

2) La otra consecuencia de la ausencia de rozamiento con el piso, es que el sistema "*bloque+rampa*" no recibe fuerzas externas en el eje x (estamos hablando del sistema, y sus fuerzas externas, las Normales de las que hablamos antes no cuentan porque son fuerzas de interacción entre ellos). Por lo tanto, de la ecuación

$$\sum \vec{F}_{ext.} = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} \xrightarrow{en\ el\ eje\ x} \left(\frac{d\vec{P}_{sist}}{dt}\right)_x = 0 \rightarrow \vec{P}_{sist,x} = cte$$

Es decir, como el sistema está aislado en forma horizontal (no hay fuerzas externas en esa dirección), ***la cantidad de movimiento del sistema en el eje x es constante***. Es decir:

$$m.v_{1x,i} + M.v_{2x,i} = m.v_{1x,f} + M.v_{2x,f} \xrightarrow{empiezan\ en\ reposo} 0 = m.v_1 - M.v_2$$

A las dos velocidades finales les saqué el subíndice, para usar la misma notación que en la ecuación de la energía. Es evidente que al terminar la caída, la velocidad de la rampa y el bloque son horizontales (justamente, para que no existan dudas al respecto, nos indican que en el final de la rampa la misma es tangente al piso, es decir que cuando el bloque llega abajo su velocidad es horizontal). Nos queda un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, despejamos de la segunda ecuación y reemplazamos en la primera:

$$v_1 = \frac{M.v_2}{m} \xrightarrow{reemplazo} \frac{1}{2}.m\left(\frac{M.v_2}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}.M.v_2^2 = m.g.h \rightarrow \frac{1}{2}.\frac{M^2.v_2^2}{m} + \frac{1}{2}.M.v_2^2 = m.g.h$$

Agrupamos para despejar v_2:

$$\frac{1}{2}.v_2^2.\left(\frac{M^2}{m} + M.\right) = m.g.h \xrightarrow{común\ div} v_2^2.\left(\frac{M^2 + M.m}{m}\right) = 2.m.g.h \rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2.m^2.g.h}{M.(M+m)}}$$

Para la velocidad del bloque, reemplazamos en la sustitución:

$$v_1 = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2.m^2.g.h}{M.(m+M)}} = \sqrt{\frac{M^2}{m^2}.\frac{2.m^2.g.h}{M.(m+M)}} = \sqrt{\frac{2.M.g.h}{(m+M)}}$$

Dos últimas preguntas: 1) ¿Por qué no se conserva la energía para el bloque? Porque existe una fuerza no conservativa, la Normal, que ***no*** es perpendicular al desplazamiento. En efecto, la Normal es perpendicular a la superficie de la rampa. Pero esta no es la trayectoria del cuerpo, ya que su movimiento en el espacio es la suma de su movimiento en la rampa, ***más*** el movimiento de ésta. Es bastante difícil ver como es el movimiento total del bloque, pero ya ***no*** es tangente a la superficie de la rampa. Por este motivo pierde energía mecánica, y esa cantidad le es transferida a la rampa.

2) ¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema? Así formulada la pregunta la respuesta es NO. Parece la contradicción del razonamiento que nos llevó a la segunda ecuación, pero en realidad es lo mismo que dijimos. El sistema cambia su cantidad de movimiento en el eje *Y*, ya que el bloque empieza cayendo, luego esa velocidad la cambia en módulo y la lleva a la dirección horizontal. Como la rampa nunca tuvo movimiento vertical, entonces la cantidad de movimiento lineal en el eje *Y* no es constante. Esto se debe a que las fuerzas que recibe el sistema en el eje vertical (Normal con el piso, y ambos pesos), pueden no compensarse. Por eso fuimos muy cuidadosos de indicar que ***la conservación de la cantidad de movimiento del sistema era sobre la componente X*** (eje donde estamos seguros que no hay fuerzas externas).

20. Dos patinadores de 50 kg cada uno, se aproximan siguiendo caminos paralelos separados 1,5 metros (supóngase el hielo exento de rozamientos). Los patinadores llevan velocidades de igual dirección …

a) Tomando como punto de referencia el punto medio entre ambos patinadores, la posición del CM es posible de obtener mediante:

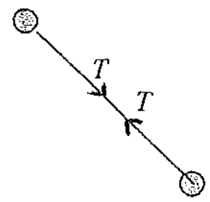
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Pero como las posiciones son opuestas $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$, y las masas son iguales, el CM se encuentra ubicado inicialmente en el origen (r = 0, el punto medio que se eligió como sistema de referencia). Para la velocidad del CM tenemos la expresión derivada de la anterior:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \xrightarrow{v_1 = -v_2 = 10\ m/s\ \hat{i}} \vec{v}_{cm} = 0$$

Como las velocidades son opuestas (por lo menos hasta que interactúen con la varilla), el CM tiene velocidad nula. Por lo tanto, **el CM se encuentra en el origen y además está quieto**, es decir que seguirá en el origen mientras se acercan los patinadores. Esto me lleva a una reflexión: si el centro de masa no se mueve, entonces hablar desde "tierra" y desde el "CM" es lo mismo.

Cuando se produce la interacción y ambos toman la varilla, aparece una fuerza de interacción entre ambos patinadores (podemos llamarla "Tensión"). Si analizamos lo que ocurre mediante los teoremas de conservación, podremos sacar conclusiones de importancia. Primero veamos lo que ocurre con la cantidad de movimiento. Como las fuerzas "externas" siguen siendo nulas (la que aparece es una fuerza "interna" entre los patinadores), el p_{sist} es constante ya que su derivada respecto al tiempo es nula:



$$\frac{d\vec{p}_{sist.}}{dt} = \overbrace{\sum F_{ext}}^{=0} \quad \rightarrow \quad \vec{p}_{sist.} = cte$$

Y como la cantidad de movimiento del sistema se puede poner como "$(m_1 + m_2).\vec{v}_{cm}$", se concluye que la velocidad del CM no cambia por esta interacción. Por lo tanto, **el CM seguirá estando quieto**.

Observación: de la expresión $\overbrace{\vec{v}_{cm}}^{0} = \dfrac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$ sale que las velocidades de los dos patinadores serán siempre opuestas, para que la del CM sea nula. Ver también que la conservación de p depende de qué se defina como sistema: para los dos patinadores hay conservación, pero para cada uno por separado **no** (la fuerza Tensión que recibe del otro deja de ser una fuerza interna)

Analicemos el momento angular, de la expresión: $\dfrac{d\vec{L}_{sist.}}{dt} = \overbrace{\sum M_{ext}}^{=0} \quad \rightarrow \quad \vec{L}_{sist.} = cte$

De nuevo, aquí estamos hablando del conjunto de ambos patinadores. En este caso, la cantidad inicial se calcula como:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{sist.} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2 = \\ &= 0{,}75\,m\,\hat{j} \wedge (50\,kg.10\,m/s\ \hat{i}) + (-0{,}75\,m\,\hat{j}) \wedge (50\,kg.(-10\,m/s\ \hat{i})) = \\ &= -750\ kg.m^2/seg\ \hat{k}\end{aligned}$$

La dirección y sentido de ambos productos vectoriales se puede determinar por la regla de la mano derecha, o bien efectuando el producto vectorial mediante el determinante

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0{,}75\,m & 0 \\ 50\,kg.10\,m/s & 0 & 0 \end{vmatrix} = -375\ kg.m^2/seg\ \hat{k}$$

y de la misma forma para el otro patinador. Como dijimos, esta cantidad permanece constante.

Observar que en este caso, como respecto al CM la tensión es una fuerza central (es decir está alineada con el centro de momentos), su momento es nulo. Por lo tanto también vale al conservación del **L** para cada patinador por separado, por lo menos mientras sea cierto que la fuerza "tensión" es central. De la conservación de $\mathbf{p}_{sist}$ sacamos como conclusión que las velocidades son iguales y opuestas. De la conservación de $\mathbf{L}_{sist}$ sacamos que:

$$\vec{L}_{sist.} = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2 = m.\,\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m.\,\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 = -750\ kg.m^2/seg\ \hat{k}$$

Pero como las masas son iguales, y las posiciones y velocidades difieren en el sentido, entonces:

$$\vec{L}_{sist.} = m.\,\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m.(-\vec{r}_1) \wedge (-\vec{v}_1) \xrightarrow{en\ módulo} 2.m.r_1.v_1 = 750\ kg.m^2 / seg$$

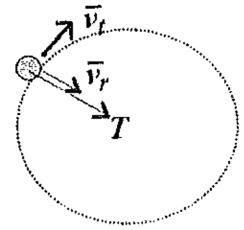
Observar que el producto "$2.r_l$" es la distancia que separa a los dos patinadores. Cuando ambos patinadores se acercan la distancia disminuye al valor 0,75 m (r_l = 0,375 metros). En ese caso la conservación de **L** del sistema nos dice que la velocidad de cada individuo debe incrementarse a

$$L_{sist.} = 2.m.r_{1f}.v_{1f} = 750\ kg.m^2 / seg \ \rightarrow\ v_{1f} = 20\ m/s$$

Es decir que los patinadores girarán más rápido alrededor del CM. ¿Cómo se explica el aumento de velocidad con la conservación de $\mathbf{p}_{sist}$? Fácil, como las velocidades son opuestas en todo momento, a pesar de cambiar su valor en módulo para cada uno, las cantidades de movimiento siguen sumando vectorialmente cero.

Finalmente, observemos que este incremento en la velocidad de los patinadores cuando se acercan nos lleva a concluir que hay un aumento de energía cinética para el sistema. ¿Cómo puede ocurrir esto si el sistema está aislado? La respuesta viene del teorema de la energía mecánica: para que se conserve la energía mecánica se necesita que no haya fuerzas no conservativas. Y en este caso existen las "tensiones", que aunque internas, son no conservativas. Es frecuente confundir el concepto de aislado (conservación de $\mathbf{p}_{sist}$ y $\mathbf{L}_{sist}$) con el de conservación de energía, aunque es claro que desde la época del CBC, cuando aprendimos "choque", sabemos que en los mismos se considera aislado y no hay conservación de **E**. Así que este resultado no debería ser una sorpresa.

Todavía se podría hacer una pregunta más: ¿cómo es que las tensiones hacen trabajo si son perpendiculares al movimiento? La respuesta es que eso **no** es cierto: cuando empieza la aproximación entre los patinadores, los mismos tienen velocidad tangencial y <u>radial</u> (por un lado se acercan al centro, por otro siguen girando alrededor de él). La existencia de esa componente radial es la que hace que la tensión no sea perpendicular al movimiento. Hay desplazamiento radial "*dr*" en el sentido de la tensión.



> 21. Sobre un plano horizontal hay apoyado un cuerpo que tiene forma de plano inclinado cuya masa es M. El rozamiento entre el cuerpo y el piso es despreciable. Contar este cuerpo choca elásticamente una …

Este problema también es muy importante, ya que su planteo difiere de los clásicos "choques". Durante la colisión entre el plano inclinado "*M*" y la masa "*m*" no podemos hablar de sistema aislado. Esto se debe a que existe una dirección en la cual aparecen fuerzas externas que no se compensan: la del eje y (la Normal sobre el plano inclinado puede ser distinta de los pesos de los cuerpos). Y es evidente que esto debe ser así, porque en el eje y no hay conservación de la cantidad de movimiento. En efecto, antes de la colisión $\mathbf{p}_{sist}$ no tiene componente sobre ese eje ("*M*" está quieto y "*m*" se mueve horizontal). Luego de la colisión el plano inclinado se mueve en el sentido horizontal (único que tiene permitido por estar apoyado sobre el piso) mientras la "*m*" sale hacia arriba, por lo tanto el sistema pasa a moverse sobre el eje y. En cambio, en la dirección del eje x si hay conservación de la cantidad de movimiento del sistema, debido a que no existen fuerzas <u>en este eje</u> (recordar que el rozamiento es nulo). Por lo tanto, el teorema de la cantidad de movimiento se usa para este eje.

$$\frac{dp_{x,sist.}}{dt} = \overbrace{\sum_{eje\ x} F_{ext}}^{=0} \ \rightarrow\ p_{x,sist.} = cte \ \rightarrow\ M.\vec{v}_{f,M} = m.\vec{v}_{o,m}$$

Donde se usó que antes de la colisión M está quieto, y luego de la misma la velocidad de "*m*" (insisto, hablando sobre el eje x) es nula. Despejo:

$$\vec{v}_{f,M} = \frac{m.\vec{v}_{o,m}}{M}$$

Pero aún nos resta calcular la velocidad final de "m" (esa "vertical" con que sale hacia arriba). Para eso vamos a usar que el choque es elástico, por lo tanto se conserva la energía del sistema. Planteamos la energía un instante antes y después del choque:

$$\tfrac{1}{2}.M.(v_{f,M})^2 + \tfrac{1}{2}.m.(v_{f,m})^2 = \tfrac{1}{2}.m.(v_{o,m})^2$$

De esta igualdad, reemplazando el resultado de la expresión para la velocidad final de M que encontramos, se puede despejar:

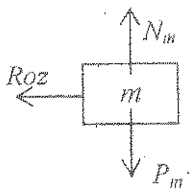
$$\frac{1}{2}.M.\left(\frac{m.v_{o,m}}{M}\right)^2 + \frac{1}{2}.m.(v_{f,m})^2 = \frac{1}{2}.m.(v_{o,m})^2 \rightarrow \frac{m^2.(v_{o,m})^2}{M} + m.(v_{f,m})^2 = m.(v_{o,m})^2$$

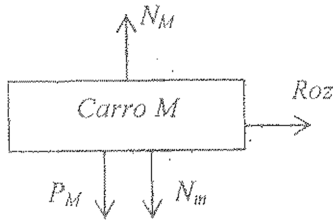
$$(v_{f,m})^2 = (v_{o,m})^2 - \frac{m.(v_{o,m})^2}{M} \rightarrow v_{f,m} = v_{o,m}\sqrt{1-\frac{m}{M}}$$

22. Sobre un carro de masa M inicialmente en reposo, apoyado sobre una superficie horizontal sin roce, desliza un cuerpo de masa m. Éste, por algún mecanismo, ha adquirido una velocidad v respecto a …

Para entender el problema conviene que empecemos por interpretar lo que ocurre. El cuerpo "m" se apoya sobre el carro M con cierta velocidad inicial. Como M está quieto, inicialmente la velocidad de cada uno es distinta. Por lo tanto empieza a actuar el rozamiento entre ambos, que tiene que hacer que "m" y "M" se muevan juntos. Para eso frena a "m" y pone paulatinamente en marcha al "M", hasta que su velocidad relativa sea nula.

Los diagramas de cuerpo libre son entonces los siguientes (suponemos que a "m" se le dio inicialmente velocidad hacia la derecha):





La normal N_m es un par de interacción entre los cuerpos, "m" es sostenido y "M" es aplastado. Pero entre ambos hay otra fuerza más que es par de interacción: el rozamiento. A "m" lo trata de frenar, mientras que al carro lo pone en marcha, tratando de que ambos puedan moverse juntos.

b) De la ecuación de "m":

$$\sum_{eje\ x} F = m.a_m \quad \rightarrow \quad -\mu.N_m = m.a_m \quad \xrightarrow{N_m=m.g} \quad -\mu.g = a_m$$

c) De la ecuación de "m":

$$\sum_{eje\ x} F = M.a_M \quad \rightarrow \quad \mu.N_m = M.a_M \quad \xrightarrow{N_m=m.g} \quad \frac{M}{m}.\mu.g = a_M$$

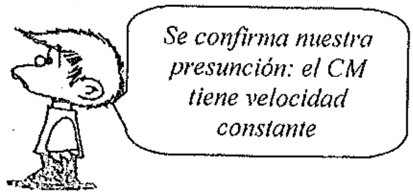
Observación: la normal N_m es, como dijimos, la fuerza de interacción vertical entre las dos masas. De ella depende el rozamiento horizontal entre ambos. Su valor (igual al peso de "m") sale de usar la ley de Newton para "m" sobre el eje y.

d) la velocidad inicial del CM sale con las condiciones iniciales:

$$v_{cm} = \frac{m.v_m + M.v_M}{(m+M)} = \frac{m.v_0 + 0}{(m+M)} = \frac{m.v_0}{(m+M)}$$

Pero, como sabemos, éste sistema está aislado (las fuerzas externas son nulas o se compensan), y por lo tanto su centro de masa tiene cantidad de movimiento constante. Es decir, su velocidad no cambia a medida que transcurre el problema. Observar además que sin embargo ambas masas están aceleradas como vimos antes. Pero la teoría nos diría que:

$$a_{cm} = \frac{m.a_m + M.a_M}{(m+M)} = \frac{-m.\mu.g + M.\frac{m}{M}.\mu.g}{(m+M)} = 0$$



e) "m" ejecuta un MRUV. Su velocidad inicial es v_o, por lo tanto tengo: $x_m = v_o.t - \frac{1}{2}.\mu.g.t^2$

f) "M" ejecuta otro MRUV, pero parte del reposo: $x_M = +\frac{1}{2}.\frac{m}{M}\mu.g.t^2$

g) el desplazamiento relativo lo podemos obtener a partir de la transformación de Galileo:

$$x_{m,M} = x_{m,T} + x_{T,M} = x_{m,T} - x_{M,T} = v_o.t - \tfrac{1}{2}.\mu.g.t^2 - \tfrac{1}{2}.\tfrac{m}{M}.\mu.g.t^2$$

Sacando factor común en los términos cuadráticos: $x_{m,M} = v_o.t - \frac{1}{2}.\left(\mu.g + \frac{m}{M}.\mu.g\right)t^2$

h) e i) Para obtener el trabajo del rozamiento para ambos cuerpos, debemos obtener el desplazamiento total entre ellos. Para eso, averigüemos en primer lugar durante cuánto tiempo se mueven por separado. Planteo que la velocidad relativa se termina haciendo cero:

$$x_{m,M} = v_o.t - \frac{1}{2}.\left(\mu.g + \frac{m}{M}.\mu.g\right)t^2 \xrightarrow{derivo} v_{m,M} = v_o - \left(\mu.g + \frac{m}{M}.\mu.g\right)t$$

$$\rightarrow \quad 0 = v_o - \left(\mu.g + \frac{m}{M}.\mu.g\right)t \xrightarrow{despejo} t = \frac{v_0}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\mu.g}$$

Reemplazo en la ecuación del movimiento relativo:

$$x_{m,M} = v_0.\frac{v_0}{\left(1+\frac{m}{M}\right).\mu.g} - \frac{1}{2}.\left(1+\frac{m}{M}\right).\left(\frac{v_0}{\left(1+\frac{m}{M}\right).\mu.g}\right)^2 \xrightarrow{opero}$$

$$x_{m,M} = \frac{v_0^2}{\left(1+\frac{m}{M}\right).\mu.g} - \frac{1}{2}.\frac{v_0^2}{\left(1+\frac{m}{M}\right).\mu.g} = \frac{1}{2}.\frac{v_0^2}{\left(1+\frac{m}{M}\right).\mu.g} \quad (\clubsuit)$$

Con este desplazamiento, podemos calcular el trabajo del rozamiento sobre cada cuerpo. Para eso basta usar la definición de trabajo, usando para "m" y "M" un ángulo de 180° (el rozamiento se opone a su movimiento relativo en cualquiera de los dos casos):

$$W_m = \overbrace{\mu.m.g}^{Roz}\ \overbrace{\frac{1}{2}.\frac{v_0^{\ 2}}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\mu.g}}^{desp.}.\cos(180) = -\frac{1}{2}.\frac{m.v_0^{\ 2}}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}$$

De todas formas, quiero ser claro con algo para no meter la pata en el último punto: este trabajo es en realidad una disipación de energía del sistema de cuerpos que se debe tener en cuenta una sola vez. Es decir, **no** es que cada cuerpo pierde una energía igual a este trabajo. Lo correcto es decir que el sistema pierde una cantidad de energía igual a este trabajo.

j) Hecha la aclaración del punto de arriba, la variación de energía mecánica del sistema es igual al trabajo del rozamiento (es decir, el de la fuerza no-conservativa):

$$\Delta E_{cin} = -\frac{1}{2}.\frac{m.v_0^{\ 2}}{\left(1+\frac{m}{M}\right)} \qquad ó \qquad -\frac{1}{2}.\frac{m.M.v_0^{\ 2}}{(M+m)}$$

Quiero volver al asunto de por qué contamos sólo una vez al trabajo del rozamiento; compará contra una situación más familiar: si un cuerpo desliza respecto a un piso "quieto" y se nos pregunta cuánto el trabajo del rozamiento, la respuesta hubiera sido que tanto sobre el cuerpo como sobre el piso el rozamiento hace el mismo trabajo, pero a la hora de tener en cuenta este trabajo para sacar la variación de energía, se lo cuenta sólo una vez.

Por último, existe una forma de obtener la misma respuesta, que tiene que ver con los conceptos de esta guía. Aún no hemos usado que éste es un sistema aislado, por lo tanto se conserva la cantidad de movimiento $\mathbf{p}_{sist}$:

$$p_f = p_i \ \rightarrow\ (M+m).v_f = m.v_o \ \xrightarrow{despejo}\ v_f = \frac{m.v_o}{(M+m)}$$

Donde v_f es la velocidad que tienen ambos cuando se mueven juntos. La variación de energía resulta entonces:

$$\Delta E_{cin} = E_f - E_o = \frac{1}{2}.(M+m).\left(\frac{m.v_o}{(M+m)}\right)^2 - \frac{1}{2}.m.v_0^{\ 2}$$

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}.\frac{m^2.v_o^{\ 2}}{(M+m)} - \frac{1}{2}.m.v_0^{\ 2} = \frac{1}{2}.m.v_0^{\ 2}.\left(\frac{m}{(M+m)} - 1\right)$$

Saco común divisor y simplifico: $\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}.m.v_0^{\ 2}.\left(\frac{\cancel{m} - M - \cancel{m}}{(M+m)}\right) = -\frac{1}{2}.\frac{m.M.v_0^{\ 2}}{(M+m)}$

Ahora desde el sistema no inercial fijo al carro

Si las mismas cuentas las hacemos desde un sistema de referencia no inercial sujeto al carro, entonces en los diagramas debemos agregar las "fuerzas ficticias" de valor "masa del cuerpo por aceleración del sistema de referencia (la del carro M)". Así:

$$m)\ -Roz - \overbrace{m.a_M}^{f_i} = m.a_{m,M} \qquad\qquad M)\ +Roz - \overbrace{M.a_M}^{f_i} = 0$$

En esta segunda ecuación estamos usando que la aceleración de M respecto al sistema fijo a si mismo es nula. El rozamiento se calcula como "μ por la normal entre los cuerpos", y esta normal coincide en valor con el peso del cuerpo superior:

$$+\mu.m.g - M.a_M = 0 \xrightarrow{despejo} a_M = \frac{\mu.m.g}{M} \xrightarrow{reemplazo\ en\ m}$$

$$-\mu.\cancel{m}.g - \cancel{m}.\frac{\mu.m.g}{M} = \cancel{m}.a_{m,M} \xrightarrow{factor\ común} a_{m,M} = -\mu.g.\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

Desde este sistema, este es el valor de la aceleración de "m" (como dijimos, la de "M" es 0).

d) esta pregunta requiere de mayor precisión: el CM en este sistema está acelerado. En efecto, desde el carro, "m" empieza con v_o y termina quieto, en tanto "M" jamás se mueve. Por lo tanto el CM empieza con velocidad dada por:

$$v_{cm} = \frac{m.v_o + M.0}{(m+M)} = \frac{m.v_o}{(m+M)}$$

Pero termina con velocidad nula.

e) f) y g) desde este sistema, "M" tiene desplazamiento nulo, en tanto que el de "m" relativo a "M" es el mismo que el relativo al sistema de referencia. Lo podemos calcular con la aceleración relativa y la ecuación complementaria de los MRUV:

$$\overbrace{v_f}^{0}{}^2 - v_o{}^2 = 2.a_{m,M}.d \xrightarrow{despejo} d = \frac{-v_o{}^2}{2.\left(-\mu.g.(1+\frac{m}{M})\right)} = \frac{M.v_o{}^2}{2.\mu.g.(M+m)}$$

Observación: el valor del desplazamiento relativo coincide con el hallado en el sistema fijo a Tierra (basta arreglar el divisor de la expresión ♣ encontrada en la página 28).

h) e i) El trabajo del rozamiento se saca con la expresión:

$$W^{roz} = Roz.d.\cos(180) = -\mu.m.g.\frac{M.v_o{}^2}{2.\mu.g.(M+m)} = -\frac{1}{2}.\frac{M.m.v_o{}^2}{(M+m)}$$

j) finalmente, para la variación de energía cinética hay que considerar el trabajo arriba calculado pero sólo una vez (recordar discusión sobre este punto en la parte respectiva desde el sistema fijo a Tierra). Como vemos, este resultado también coincide con el sacado anteriormente.